ISPITNI KATALOG ZA EKSTERNU MATURU U ŠKOLSKOJ 2016/2017. GODINI

MATEMATIKA

Stručni tim za matematiku:

prof.dr. Senada Kalabušić

mr. Amar Bašić

Merita Kovač, prof.

mr. Almir Ćesko

Dragana Paralović, prof.

februar, 2017. godine

Sadržaj

Uvod 5
1. Struktura ispitnog kataloga 5
2.Struktura ispita 6
3. Pregled osnovnih formula 6
4. Zadaci za nivo A sa rješenjima i uputama 11
4.0 SKUP. SKUPOVI BROJEVA I OPERACIJE 11
    4.0.1 Rješenja zadataka i upute 13
4.1 ALGEBARSKI IZRAZI 15
    4.1.1 Rješenja zadataka i upute 17
4.2 GEOMETRIJA U RAVNI 19
    4.2.1 Rješenja zadataka i upute 21
4.3 ANALITIČKA GEOMETRIJA U RAVNI 23
    4.3.1 Rješenja zadataka i upute 25
4.4 LINEARNE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE. SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA 27
    4.4.1 Rješenja zadataka i upute 29
4.5 KVADRATNE FUNKCIJE, JEDNAČINE I NEJEDNAČINE. JEDNAČINE VIŠEG REDA. IRACIONALNE JEDNAČINE 32
    4.5.1 Rješenja zadataka i upute 34
4.6 EKSPONENCIJALNE FUNKCIJE, JEDNAČINE I NEJEDNAČINE. LOGARITAMSKE FUNKCIJE, JEDNAČINE I NEJEDNAČINE 36
    4.6.1 Rješenja zadataka i upute 39
4.7 TRIGONOMETRIJA 41
    4.7.1 Rješenja zadataka i upute 43
4.8 GEOMETRIJA U PROSTORU 46
    4.8.1 Rješenja zadataka i upute 48
4.9 REALNE FUNKCIJE JEDNE PROMJENJIVE. DIFERENCIJALNI I INTEGRALNI RAČUN 50
    4.9.1 Rješenja zadataka i upute 52
4. A Primjer ispita za nivo A (NPP za gimnazije) 54
5. Zadaci za nivo B sa rješenjima i uputama 55

5.0 Skup. Skupovi i operacije sa skupovima ... 55
5.0.1 Rješenja zadataka i upute ... 57
5.1 Stepeni i korijeni ... 59
5.1.1 Rješenja zadataka i upute ... 61
5.2 Algebarski izrazi ... 63
5.2.1 Rješenja zadataka i upute ... 65
5.3 Geometrija ... 67
5.3.1 Rješenja zadataka i upute ... 69
5.4 Pravougli koordinatni sistem u ravni ... 70
5.4.1 Rješenja zadataka i upute ... 72
5.5 Linearne jednačine i nejednačine. Sistemi linearnih jednačina ... 73
5.5.1 Rješenja zadataka i upute ... 75
5.6 Kvadratne funkcije, jednačine i nejednačine. Jednačine višeg reda. ... 77
5.6.1 Rješenja zadataka i upute ... 79
5.7 Eksponencijalne funkcije, jednačine, nejednačine ... 80
5.7.1 Rješenja zadataka i upute ... 82
5.8 Logaritamske funkcije, jednačine i nejednačine ... 84
5.8.1 Rješenja zadataka i upute ... 86
5.9 Osnovi trigonometrije ... 87
5.9.1 Rješenja zadataka i upute ... 89
5. B Primjer ispita za nivo B ... 91
6. Zadaci za nivo C sa rješenjima i uputama ... 93
6.0 Skup. Skupovi brojeva i operacije ... 93
6.0.1 Rješenja zadataka i upute ... 95
6.1 Omjeri, proporcije i procenti ... 97
6.1.1 Rješenja zadataka i upute ... 98
6.2 Polinomi ... 100
6.2.1 Rješenja zadataka i upute ... 102
6.3 Algebarski izrazi ... 103
6.3.1 Rješenja zadataka i upute ... 105
6.4 Linearne funkcije ... 107

6.4.1 Rješenja zadataka i upute 109
6.5 Linearne jednačine i nejednačine. Sistemi linearnih jednačina 110
6.5.1 Rješenja zadataka i upute 112
6.C Primjer ispita za nivo C 113

Uvod

Jedan od glavnih ciljeva svakog obrazovnog sistema treba biti da obezbijedi što viši nivo matematičkih znanja i sposobnosti učenika. Važnost matematičkog znanja ogleda se, između ostalog, i u svakodnevnom uspješnom snalaženju pojedinca u promjenjivim društvenim okolnostima, kao i u procesu cjeloživotnog učenja. Matematika je važna za nastavak obrazovanja na fakultetima, jer većina fakulteta na prvoj godini, a neki i na višim godinama, obavezno imaju matematičke predmete. Matematika ima veliku primjenu u svim drugim naučnim disciplinama, i što je viši nivo matematičkih znanja to će ukupan privredni razvoj zemlje biti veći.

Matematika je na Eksternoj maturi obavezni predmet za sve učenike koji su završili srednju školu sa četverogodišnjim obrazovanjem. Ispitni katalog za Eksternu maturu iz matematike osnovni je dokument kojim se jasno opisuje šta će se i na kojem nivou ispitivati na Eksternoj maturi iz predmeta Matematika.

Cilj ispita iz predmeta Matematika je: provjeriti u kojoj mjeri učenici mogu ili znaju upotrebljavati matematički jezik tokom čitanja i interpretiranja zadataka; u kojoj mjeri mogu interpretirati podatke zadane u analitičkom, tabličnom, grafičkom obliku ili opisane rječima, zatim u tim oblicima logično i precizno zapisivati dobivene rezultate; u kojoj mjeri su sposobni da matematički modeliraju neki problem, riješe ga, provjere ispravnost i interpetiraju rezultate; uočavati i znati koristiti vezu između različitih oblasti u matematici; koristiti se različitim matematičkim tehnikama.

1. Struktura ispitnog kataloga

Vodič za Eksternu maturu prepoznaje tri nivoa iz Matematike: A, B i C (Dodatak vodiću B). Nivo A je usklađen s nastavnim planom i programom za Matematiku u gimnazijama. Nivo B je usklađen s nastavnim planom i programom za Matematiku u školama za srednje stručno obrazovanje i obuku (četverogodišnje tehničke i srodne škole). Nivo C je usklađen s nastavnim planom i programom u školama srednjeg stručnog obrazovanja i obuku sa jednogodišnjim programom za Matematiku.

Svaki od pobrojanih nivoa sadrži po 20 zadataka iz svake oblasti, sa rješenjima i uputama za njihovo rješavanje, koji pokrivaju relevantne oblasti iz predmeta Matematika za svaki nivo posebno. Dakle nivoi A i B sadrže po 200 zadataka (10 oblasti po 20 zadataka), dok nivo C sadrži 120 zadataka (6 oblasti po 20 zadataka). U skladu sa njihovom težinom, zadaci su za svaki nivo svrstani u skupinu lakših(niži nivo), srednjih(srednji nivo) i težih(viši nivo) zadataka. Zadaci u lakšoj skupini su zadaci višestrukog izbora, tj. zaokruživanja tačnog odgovora i ne zahtijevaju poznavanje velikog broja matematičkih tehnika. Zadaci u srednjoj skupini zahtijevaju poznavanje i korištenje osnovnih matematičkih tehnika, dok zadaci u težoj skupini zahtijevaju, pored poznavanja i korištenja matematičkih tehnika, logičko povezivanje činjenica i tumačenje dobivenih rezultata.

Radna podloga za selekciju zadataka su zadaci koje su MONKS-u dostavile srednje škole iz KS, udžbenici i zbirke zadataka iz matematike za srednju školu.

2.Struktura ispita

Za svaki nivo ispit sadrži deset zadataka od toga prva četiri zadatka pripadaju nižem nivou, sljedeća četiri zadatka pripadaju srednjem nivou i dva zadnja zadatka pripadaju višem nivou, pri čemu se mora voditi računa o podjednakoj zastupljenosti izučavanih oblasti.

3. Pregled osnovnih formula

- *Kompleksan broj:* $i^2 = -1$, $z = a + bi$, $\overline{z} = a - bi$, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, $a,b \in R$
- $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$,

  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$, $z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$,

  $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$

► $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ► $a^m : a^n = a^{m-n}$, $a \neq 0$ ► $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, $a \neq 0$ ► $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$

► $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

► $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2$

► $a^2 - b^2 = (a - b)\cdot(a + b)$

► $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

► $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

► $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1} + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}a\,b^{n-1} + b^n$

► Kvadratna jednačina: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0 \Rightarrow x_{1,2}= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

► Vietove formule: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

► Tjeme parabole: $T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

► $b^x = a \Leftrightarrow x = \log_b a$, $\log_b b^x = x = b^{\log_b x}$

► $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$, $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$, $x > 0, y > 0, 0 < b \neq 1$,

$\log_b x^y = y \log_b x, 0 < b \neq 1, x > 0$; $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, 0 < a \neq 1, 0 < b \neq 1, x > 0$

► Površina trougla: $P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$,

$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$;

$P = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{bc\sin\alpha}{2} = \frac{ac\sin\beta}{2}$, $P = \frac{abc}{4R}$, $P = r \cdot s$

► Jednakostranični trougao: $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $R = \frac{2}{3}h$, $r = \frac{1}{3}h$

► Površina paralelograma: $P = a \cdot h$,

► Površina trapeza: $P = \frac{a+c}{2}h$

► Površina kruga: $P = r^2\pi$

► Obim kruga: $O = 2r\pi$

► Površina kružnoga isječka: $P = \frac{r^2\pi\alpha}{360}$

► Dužina kružnog luka: $l = \frac{r\pi\alpha}{180}$

B – površina osnove (baze), M – površina omotača, H – dužina visine, r – poluprečnik osnove

► Zapremina (volumen) prizme i valjka: $V = B \cdot H$

► Površina prizme i valjka: $P = 2B + M$

► Zapremina (volumen) piramide i kupe: $V = \frac{1}{3} B \cdot H$,

► Površina piramide: $P = B + M$

► Površina kupe: $P = r^2\pi + r\pi s$

► Zapremina (volumen) lopte: $V = \frac{4}{3}r^3\pi$,

► Površinalopte: $4r^2\pi$,

r – poluprečnik lopte

U pravouglom trouglu vrijedi:

sinus ugla = $\frac{suprotna\ kateta}{hipotenuza}$ kosinus ugla = $\frac{nalegla\ kateta}{hipotenuza}$

tangens ugla = $\frac{suprotna\ kateta}{nalegla\ kateta}$ kotangens = $\frac{nalegla\ kateta}{suprotna\ kateta}$

► Sinusna teorema: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$,

► Kosinusna teorema: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$,

► $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

► $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$,

$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$,

$\text{tg}(x \pm y) = \frac{tg\ x \pm tg\ y}{1 \mp tg\ x\ tg\ y}$

► $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

► $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

► $\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$,

$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$,

► $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y) - \sin(x+y)]$

► Udaljenost između tačaka T_1, T_2: $d(T_1,T_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

► Središte duži $\overline{T_1T_2}$: $P\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

► Težište trougla $T(x_T, y_T)$: $x_T = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y_T = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$

► Površina trougla čiji su vrhovi $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$:

$$P = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

► Jednačina prave kroz jednu tačku $A(x_1, y_1)$: $y - y_1 = k(x - x_1)$

► Jednačina prave kroz dvije tačke $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

► Ugao α između dvaju pravih: tg α = $\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$

► Udaljenost tačke $T(x_1, y_1)$ i prave p: Ax + By + C = 0; d(T,p) = $\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

► Jednačine krivih drugog reda i tangenata u tački krive

Kriva drugog reda	Jednačina krive	Jednačina tangente u tački T (x_1, y_1) krive
Kružnica središte S(p,q)	$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$	$(x_1 - p)(x - p) + (y_1 - q)(y - q) = r^2$
Elipsa fokusi $F_{1,2}(\pm e, 0)$ $e^2 = a^2 - b^2$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_2 y}{b^2} = 1$
Hiperbola fokusi $F_{1,2}(\pm e, 0)$ $e^2 = a^2 + b^2$ asimptote $y = \pm\frac{b}{a}x$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_2 y}{b^2} = 1$
Parabola fokus $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$	$y^2 = 2px$	$y_1 y = p(x + x_1)$

► Uslov dodira prave $y = kx + n$ i kružnice $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ je:

$$r^2(k^2 + 1) = (kp - q + n)^2$$

► Uslov dodira prave $y = kx + n$ i elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ je: $a^2k^2 + b^2 = n^2$

► Uslov dodira prave $y = kx + n$ i hiperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ je: $a^2k^2 - b^2 = n^2$

► Uslov dodira prave $y = kx + n$ i parabole $y^2 = 2px$ je: $p = 2kn$

► Skalarni proizvod vektora: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

► Vektorski proizvod vektora: $\vec{a}x\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha \cdot \vec{c}_0$

► Mješoviti proizvod vektora: $(\vec{a}x\vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

► Aritmetički niz: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$, $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

► Geometrijski niz: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$

► Geometrijski red: $S = \frac{a_1}{q-1}$, $|q|<1$

► Izvod proizvoda: $(f \cdot g)' = f'' \cdot g + f \cdot g'$

► Izvod količnika: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

► Izvod složene funkcije: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

► Tangenta na grafik funkcije f u tački $T(x_1, y_1)$: $y - y_1 = f'(x_1) \cdot (x - x_1)$

► Tablica izvoda (pod odgovarajućim uslovima na domen funkcija):

$c' = 0, \quad (x^n)' = nx^{n-1}, \quad (sinx)' = \cos x, \quad (cosx)' = -\sin x$

$(tgx)' = \frac{1}{(cosx)^2}, \quad (ctgx)' = \frac{-1}{(sinx)^2}, \quad (e^x)' = e^x, \quad (lnx)' = \frac{1}{x}$

$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1, (arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$

► Tablica neodređenih integrala (pod odgovarajućim uslovima na domen funkcija):

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1, \quad \int \frac{dx}{x} = ln|x| + C, \quad \int e^x\,dx = e^x + C$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x\,dx = \sin x + C$

$\int \frac{dx}{(sinx)^2} = -ctgx + C, \quad \int \frac{dx}{(cosx)^2} = tgx + C, \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsinx + C, |x| < 1$

4. Zadaci za nivo A sa rješenjima i uputama

4.0 SKUP. SKUPOVI BROJEVA I OPERACIJE

(skupovi brojeva, stepeni i korijeni, binomni obrazac i nizovi)

I grupa zadataka (niži nivo – zadaci višestrukog izbora)

1) Vrijednost izraza $\left[\left(16^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{-2}{3}} \cdot \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}\right]^{\frac{-1}{2}}$ iznosi:

a) $3^{\frac{1}{2}}$ b) 6 c) $2^{\frac{1}{2}}$ d) 3

2) Vrijednost izraza $\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2} - \sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}$ je:

a) $2\sqrt{5}-4$ b) $2\sqrt{5}$ c) 0 d) -4

3) Zapis broja $z = 2-2i$ u trigonometrijskom obliku glasi:

a) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ b) $2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

c) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ d) $2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

4) Treći član u razvoju binoma $(2x+3y)^6$ iznosi:

a) $15x^4y^2$ b) $144x^2y^4$ c) $4320x^4y^2$ d) $2160x^4y^2$

5) Aritmetički niz u kojem je $a_1 = 3, a_{15} = 31$ glasi:

a) 2,3,9,7 b) 9,5,3,7 c) 3,7,9,5 d) 3,5,7,9

II grupa zadataka (srednji nivo)

6) Odrediti nepoznate veličine a, b, c, d iz proporcija:

$$a{:}\,b = 7{:}\,8, c{:}\,d = 9{:}\,10, b{:}\,d = 4{:}\,5, \text{ te } a - 3b - 5c + 7d = 16$$

7) Izračunati vrijednost izraza:

$$\left(\frac{b^{-1} + a^{-1}}{ab^{-1} + a^{-1}b}\right)^{-1} + \left(\frac{a^{-1} + b^{-1}}{2}\right)^{-1} - \frac{b^{-1} - a^{-1}}{a^{-1}b^{-1}}$$

8) Izračunati vrijednost izraza:

$$\left(\left(\frac{3x^{-3}}{5y^{-2}}\right)^{-3} : \left(\frac{9x^{-1}}{5y^{-3}}\right)^{-2}\right) \cdot \frac{x^{-6}y}{15}$$

9) Izračunati vrijednost izraza:

$$\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2} \cdot \sqrt{\frac{ay}{bx}}} \cdot \sqrt{\frac{b}{a} \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{y}}} \cdot \sqrt{\frac{x}{y} \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{b}}}$$

10) Odrediti realne brojeve x i y iz sljedećih jednakosti:

a) $(1 - i)x + (2 + i)y = 1 - 3i$

b) $\frac{x-i}{2i} - \frac{x+y}{1-i} \cdot i = \frac{1-i}{1+i}$

11) Koliko je $Re\left(\frac{z^3+2|z|-4i^{12345}}{\bar{z}-z}\right)$ ako je $z = 1 - i\sqrt{3}$

12) Izračunati $\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^5$

13) Zbir binomnih koeficijenata drugog i trećeg člana u razvijenom obliku binoma $\left(\frac{1}{x\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x^2}\right)^n$ jednak je 136. Odrediti član koji sadrži $x^{8,5}$.

14) Koliko članova aritmetičkog niza $20{,}16{,}12{,}8, \ldots$ treba sabrati da bi zbir bio jednak 0?

15) Odrediti x tako da brojevi $32^x, 6^{x^2+1}, 3^{5x}$ obrazuju uzastopne članove geometrijskog niza.

III grupa zadataka (viši nivo)

16) Na jednom takmičenju učestvuje ekipa od 30 učenika, od kojih svaki učenik učestvuje bar u jednoj od disciplina: atletika (A), plivanje (P), ili nogomet (N). Poznato je da se njih 16 takmiči u atletici, 14 u plivanju, a 10 u nogometu. Koliko se učenika takmiči u sve tri sportske discipline, ako se iz atletike i plivanja takmiči 6 učenika, iz atletike i nogometa 3 učenika, a iz plivanja i nogometa 2 učenika. (Odgovor obrazložiti!)
17) Odrediti član koji ne sadrži p, u razvoju binoma $\left(p\sqrt[4]{p}-\frac{1}{\sqrt[8]{p^5}}\right)^n$, ako je suma binomnih koeficijenata drugog člana od početka i trećeg člana s kraja jednaka 78.
18) Tri pozitivna broja obrazuju aritmetički niz. Treći broj je veći od prvog za 14. Ako trećem broju dodamo prvi broj, a ostala dva ostaju nepromijenjena, dobija se geometrijska progresija. Naći te brojeve.
19) Odrediti sljedeće granične vrijednosti:
    a) $\lim_{n\to\infty}\left(3n-\sqrt{9n^2+12n-17}\right)$
    b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+3+5+7+\cdots+(2n+1)}{n+1}-\frac{2n+1}{2}\right)$
20) Izračunati $S_n=1+\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$, a zatim odrediti $\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot S_n}{2n+3}$

4.0.1 Rješenja zadataka i upute

I grupa zadataka (niži nivo – zadaci višestrukog izbora)

1) b)
2) c)
3) c)
4) d)
5) d)

II grupa zadataka (srednji nivo)

6) $a=14, b=16, c=18, d=20$
7) $2b$

8) xy

9) $\sqrt{\frac{ax}{by}}$

10) a) $x = -\frac{7}{3}, y = -\frac{2}{3}$

b) $x = 1, y = 0$

11) $\frac{-2\sqrt{3}}{3}$

12) $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

13) $n = 16, k = 15$, pa šesnaesti član u razvoju binoma sadrži $x^{8,5}$

14) $n = 11$

15) $x = \frac{1}{2} \vee x = 2$

III grupa zadataka (viši nivo)

16) 1 učenik se takmiči u sve tri discipline (Uputstvo: nacratiti odgovarajuće Venove dijagrame za svaku od sportskih disciplina)

17) $n = 12, k = 8$, pa deveti član u razvoju binoma ne sadrži p

18) $a = 7, b = 14, c = 21$

Uputstvo: $b = a + c, c = a + 14, b^2 = a(a + c) = 2abb(b - 2a) = 0$ odakle dobijamo da je $b = 0$ ili $b = 2a$. Prvi slučaj otpada pa je $b = 2a$. Dalje imamo da je $2b = a + c, 4a = a + c$ tj. $c = 3a$. Sada je

$3a = a + 14$ tj. $a = 7$.

19) a) -2

b) $-\frac{1}{2}$

20) $S_n = \frac{5}{3}\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right]$, a $\lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot S_n}{2n+3} = \frac{5}{6}$

4.1 ALGEBARSKI IZRAZI

I grupa zadataka (niži nivo – zadaci višestrukog izbora)

1) Izraz $\frac{x^2-5x+4}{x^2-4x}, x \neq 4, x \neq 0$ je jednak:

   a) $\frac{x-5}{x-1}$ b) $\frac{4-5x}{-4x}$ c) $\frac{x-1}{x-4}$ d) $\frac{x-1}{x}$

2) Vrijednost polinoma $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2$ u tački $x = \sqrt{2} - 1$ iznosi:

   a) $2 - 3\sqrt{2}$ b) $2 + 3\sqrt{2}$ c) $-2 + 3\sqrt{2}$ d) $-2 - 3\sqrt{2}$

3) Polinom $A(x) = 3x^4 - 2x^3 + 4mx^2 - x - m$ je djeljiv binomom $x - 2$. Tada vrijednost parametra m iznosi:

   a) $m = -1$ b) $m = -2$ c) $m = 3$ d) $m = -\frac{2}{3}$

4) Za $a \neq \frac{1}{2}$ izraz $\frac{1-\frac{1}{1+2a}+2a}{1+\frac{1}{1+2a}}$ jednak je:

   a) $2a + 1$ b) $2a + 2$ c) $2a$ d) a

5) Izraz $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$ ima vrijednost:

   a) $\frac{b-c}{a-b}$ b) $\frac{2a}{c-b}$ c) $2abc$ d) 0

II grupa zadataka (srednji nivo)

6) Odrediti koeficijente a i b tako da polinomi $A(x)$ i $B(x)$ budu identički jednaki na čitavom skupu $\mathbb{R}$:

   a) $A(x) = x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15,\ B(x) = (x+1)(x^3 + ax^2 - 17x + 6)$

   b) $A(x) = 2x^5 - 4x^2 + 5x - 3,\ B(x) = (x-1)(2x^4 + ax^3 + bx^2 - 2x + 3)$

7) Odrediti realne vrijednosti parametara a i b tako da polinom $P(x) = ax^3 - bx^2 - 5x + 4$ pri dijeljenju sa $x + 1$ daje ostatak 6, a pri dijeljenju sa $x - 1$ daje ostatak 2.

8) Primjenom metode grupisanja članova, sljedeće polinome rastaviti na faktore:

a) $a^3b^2 - a^3 + 8b^2 - 8$

b) $14ab + 15ac - 10a^2 - 21bc$

9) Rastaviti polinome na proste faktore:

a) $a^2 - 9 - 2ab + b^2$

b) $16a^2 - 9y^2 + 12yb - 4b^2$

10) Rastaviti polinome na proste faktore:

a) $xy(x-y) - xz(x-z) + yz(y-z)$

11) Skratiti razlomak, uz islove $x \neq \pm 1, x \neq -2$:

$$\frac{x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 5x - 6}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

12) Uprostiti izraz:

$$\frac{x}{ax - 2a^2} - \frac{2}{x^2 + x - 2ax - 2a} \cdot \left(1 + \frac{3x + x^2}{x + 3}\right)$$

13) Uprostiti izraz:

$$\left(\frac{3a}{9 - 3x - 3a + ax} - \frac{1}{a^2 - 9} : \frac{x - a}{3a^2 + 9a}\right) : \frac{3a(x^2 + 3x + 9)}{x^3 - 27}$$

14) Izvršiti naznačene operacije sa razlomcima:

$$\left(\frac{a}{a^2 + a - 6} + \frac{1}{a^3 + 3a^2 - 4a - 12} - \frac{4}{6 - a - a^2}\right) \cdot \left(a - \frac{4 + 3a}{a + 3}\right)$$

15) Izvršiti naznačene operacije sa razlomcima:

$$\left(\frac{1}{2 + 4x} - \frac{1 - x}{8x^3 + 1} : \frac{1 - 2x}{1 - 2x + 4x^2}\right) : \frac{2x - 1}{4x + 2} - \frac{1}{1 - 4x + 4x^2}$$

III grupa zadataka (viši nivo)

16) Odrediti nepoznate koeficijente a, b, c tako da polinom $A(x)$ bude djeljiv polinomom $B(x)$:

a) $A(x) = 3x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx + 10,\ B(x) = x^2 + x - 2$

b) $A(x) = x^5 + 2x^4 - 8x^3 + ax^2 + bx + c,\ B(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

17) Naći ostatak pri dijeljenju polinoma $A(x)$ polinomom $B(x)$ ako je:

a) $A(x) = x^{50} - 2x^{49} + 3,\ B(x) = x^2 - 3x + 2$

b) $A(x) = x^{2017} - 9x^{2015} + 2,\ B(x) = x^2 - 3x$

18) Rastaviti polinome na faktore:

a) $a^4 + 4b^4$

b) $a^4 + a^2 + 1$

19) Dat je izraz $G = \frac{x^2+2}{x^3-6x^2+11x-6} + \frac{2x^2-x}{x^2-3x+2} - \frac{x^2+2x-4}{x^2-4x+3}$

a) Odrediti definiciono područje datog izraza $G(x)$

b) Dokazati da dati izraz ne zavisi od x

20) Pokazati da je vrijednost izraza:

$$\frac{\frac{1}{x^6} - 64}{4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} \cdot \frac{x^2}{4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} - \frac{4x^2(2x+1)}{1-2x}$$

neparan broj za $\forall x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

4.1.1 Rješenja zadataka i upute

I grupa zadataka (niži nivo – zadaci višestrukog izbora)

1) d)

2) a)

3) b)

4) c)

5) d)

II grupa zadataka (srednji nivo)

6) a) $a = 1, b = 15$

b) $a = b = 2$

7) $a = 3, b = 0$

8) a) $(b-1)(b+1)(a+2)(a^2 - 2a + 4)$

b) $(2a - 3c)(7b - 5a)$

9) a) $(a - b - 3)(a - b + 3)$

b) $(4a - 3y + 2b)(4a + 3y - 2b)$

10) $(x-y)(y-z)(x-z)$

11) x^2+x-3 (Uputstvo: Brojnik datog razlomka rastaviti primjenom Hornerove sheme)

12) $\frac{1}{a}(x\neq -3, x\neq -1, x\neq 2a)$

13) $\frac{1}{a-x}(a\neq 0, a\neq \pm 3, x\neq 3)$

14) $1\ (a\neq -3, a\neq \pm 2)$

15) $0\ \left(x\neq \pm\frac{1}{2}\right)$

III grupa zadataka (viši nivo)

16) a) $a=b=-9$

b) $a=-12, b=11, c=6$

17) a) $a=b=1, R(x)=x+1$

b) $a=0, b=2, R(x)=2$

18) a) $(a^2+2b^2-2ab)(a^2+2b^2+2ab)$

b) $(a^2-a+1)(a^2+a+1)$

19) a) Definiciono područje datog izraza je: $x\neq 1, x\neq 2, x\neq 3$

b) Transformišući dati izraz dobijamo 1, tj. dati izraz ne zavisi od x

20) Transformacijom datog izraza dobijamo $2x+1$, što je upravo ošti oblik neparnog broja.

4.2 GEOMETRIJA U RAVNI

I grupa zadataka (niži nivo – zadaci višestrukog izbora)

1) Trougao ΔABC je jednakokraki sa dužinom osnovice $\overline{AB} = 6\ cm$ i visinom na nju $\overline{CD} = \sqrt{13}\ cm$. Dužina njegovog kraka je:

   a) $7\ cm$ b) $\sqrt{22}\ cm$ c) $2\ cm$ d) $\sqrt{10}\ cm$

2) Kakav je četverougao kome su vanjski uglovi podudarni sa uglovima: $3\varphi, 3\varphi, 2\varphi$ i 2φ?

   a) jednakokraki trapez b) raznostranični trapez

   c) pravougli trapez d) romb

3) Dva trougla su slična sa koeficijentom sličnosti koji iznosi 3. Površina manjeg od njih iznosi $6\ cm^2$. Tada površina većeg od njih iznosi:

   a) $9\ cm^2$ b) $2\ cm^2$ c) $18\ cm^2$ d) $54\ cm^2$

4) Neka je dat pravougli trougao ΔABC, kod kojeg je $\measuredangle ACB = 90°$, CH je njegova visina, te $\overline{AH} = 4\ cm$ i $\overline{BH} = 9\ cm$. Površina trougla ΔABC iznosi:

   a) $39\ cm^2$ b) $36\ cm^2$ c) $13\ cm^2$ d) $78\ cm^2$

5) Obim kružnice podijeljen je na četiri dijela, čiji se lukovi odnose kao $1:2:4:5$. Tada pripadni centralni uglovi iznose:

   a) $15°, 25°, 30°, 60°$ b) $10°, 20°, 30°, 40°$

   c) $30°, 60°, 120°, 150°$ d) $15°, 35°, 60°, 75°$

II grupa zadataka (srednji nivo)

6) Dužine stranica trougla iznose $13\ cm, 14\ cm, 15\ cm$. Odrediti dužinu srednje po dužini visine tog trougla.

7) Poluprečnik opisane kružnice oko pravouglog trougla ΔABC iznosi $12\ cm$. Hipotenuza njemu sličnog trougla dvostruko je veća od jedne katete i iznosi $36\ cm$. Odrediti obim trougla ΔABC.

8) Kateta pravouglog trougla je za $3\ cm$ duža od svoje ortogonalne projekcije na hipotenuzu, a dužina projekcije druge katete na hipotenuzu iznosi $15\ cm$. Odrediti dužine stranica trougla.

9) Ako su $\alpha = 42°$ i $\beta = 72°$ dva ugla trougla ΔABC, odrediti pod kojim se uglovima iz tačaka kružnice opisane oko tog trougla vidi stranica AB?

10) Obim paralelograma iznosi $48\ cm$, a dužine visina paralelograma se odnose kao $5:7$. Odrediti dužine stranica paralelograma.

11) U pravougaoniku $ABCD$ simetrala ugla $\measuredangle BAD$ siječe dijagonalu BD u tački P, tako da je $\overline{BP}:\overline{PD} = 4:3$ i $\overline{AC} = 25\ cm$. Odrediti dužine stranica AB i AD pravougaonika.

12) U jednakokraki trapez $ABCD$ sa dužinama osnovica $\overline{AB} = 8\ cm$ i $\overline{CD} = 2\ cm$ je upisana kružnica. Izračunati površinu trapeza.

13) Mjere dvaju nasuprotnih uglova tetivnog četverougla su u odnosu $2:3$, a odnos mjera ostalih dvaju uglova je $4:5$. Odrediti uglove ovog četverougla.

14) Na kružnicu poluprečnika $r = 30\ cm$ povučene su iz tačke udaljene od središta kružnice $50\ cm$ obje tangente. Odrediti udaljenost između tangenata.

15) Iz tačke P van kružnice povučene su tangenta i sječica. Tangenta je za $20\ cm$ manja od unutrašnjeg, a $8\ cm$ veća od vanjskog dijela sječice. Odrediti dužinu tangentne duži i sječice.

III grupa zadataka (viši nivo)

16) U trouglu ΔABC težišnica $CM, M \in AB$ iznosi $2\ cm$, a stranica AC ima dužinu $4\ cm$, te odsječak BM iznosi $2\sqrt{3}\ cm$. Odrediti obim i površinu trougla ΔABC.

17) Normala iz tjemena na dijagonalu pravougaonika siječe tu dijagonalu tako da je jedan odsječak tri puta veći od drugog odsječka. Izračunati ugao pod kojim se sijeku dijagonale pravougaonika.
18) Visina trougla na stranicu a iznosi $h_a = 2$. Na kojoj udaljenosti od stranice a treba povući pravu paralelnu sa stranicom a tako da trougao bude podijeljen na dva dijela jednakih površina?
19) U pravouglom trouglu je omjer visine i težišnice povučenih iz pravog ugla $40:41$. Odrediti odnos kateta tog trougla.
20) Trouglu ΔABC s tupim uglom β opisana je kružnica. Visina AD na stranicu BC dira tu kružnicu (tačka D je podnožje te visine na BC). Ako je $\overline{BC} = 12\ cm, \overline{BD} = 4\ cm$, kolika je dužina visine $\overline{AD}$?

4.2.1 Rješenja zadataka i upute

I grupa zadataka (niži nivo – zadaci višestrukog izbora)

1) b)
2) a)
3) d)
4) a)
5) c)

II grupa zadataka (srednji nivo)

6) $h_b = 12\ cm$ Uputstvo: iskoristiti da iz $a < b < c \Rightarrow h_a > h_b > h_c$
7) $O = 12(3 + \sqrt{3})\ cm$
8) $a = 4\ cm,\ b = 4\sqrt{15}\ cm,\ c = 16\ cm$
9) Iz tačaka luka AB stranica se vidi pod uglom od $114°$, a iz tačaka s lukovima AC i BC ta se stranica vidi pod uglom od $66°$. Iz tačaka A i B vidi se pod uglom od $0°$.
10) $a = 14\ cm,\ b = 10\ cm$
11) $a = 20\ cm,\ b = 15\ cm$ Uputstvo: iskoristiti teoremu o simetrali unutrašnjeg ugla trougla.

12) $P = 20\ cm^2$ Uputstvo: četverougao $ABCD$ je tangentni, pa iskoristiti teoremu o tangentnom četverouglu.

13) $72°, 80°, 108°, 100°$

14) $d = 48\ cm$ Uputstvo: dužina tangentnih duži iznosi $a = 40\ cm$, zatim iskoristiti sličnost trouglova.

15) $t = 12\ cm,\ s = 36\ cm$

III grupa zadataka (viši nivo)

16) $O = 4\left(\sqrt{3} + 2\right)\ cm,\ P = 4\sqrt{3}cm^2$

17) $\varphi = 60°$

18) $d = 2 - \sqrt{2}$

19) $a: b = 5: 4$

20) $\overline{AD} = 8\ cm$ Uputstvo: koristiti teoremu između tangente i tetive

4.3 ANALITIČKA GEOMETRIJA U RAVNI

(Koordinatni sistem u ravni, analitička geometrija)

I grupa zadataka (niži nivo – zadaci višestrukog izbora)

1) Prava $(3+2t)x+(3t-4)y-t-3=0$ prolazi težištem trougla kojem su vrhovi u tačkama $A(-1,2)$, $B(4,-4)$ i $C(6,-1)$. Tada t iznosi:

   a) -6 b) -5 c) 6 d) 5

2) Ako prave $x-y-1=0, 4x-3y-6=0$ i $y=mx-4$ prolaze istom tačkom, onda je:

   a) $m=-1$ b) $m=3$ c) $m=\frac{1}{2}$ d) $m=2$

3) Tačka $S(2,-3)$ je središte kružnice koja prolazi koordinatnim početkom. Kako glasi jednačina te kružnice?

   a) $(x+2)^2+(y-3)^2=13$

   b) $(x+2)^2+(y-3)^2=5$

   c) $(x-2)^2+(y+3)^2=13$

   d) $(x-2)^2+(y+3)^2=5$

4) Za koje k prava $y=kx+6$ dodiruje elipsu $x^2+2y^2=8$?

   a) $k=\pm\frac{1}{2}$ b) $k=\pm 3$ c) $k=\pm 2$ d) $k=\pm\frac{1}{3}$

5) Asimptota hiperbole je prava $y=2x$. Na hiperboli se nalazi tačka $(5,8)$. Jednačina hiperbole je:

   a) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$ b) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$ c) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$ d) $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$

II grupa zadataka (srednji nivo)

6) Kolika je površina trougla ako su tačke $P_1(-2{,}1), P_2(2{,}3)$ i $P_3(4{,}1)$ središta njegovih stranica?

7) Odrediti dužinu visine BD trougla sa tjemenima: $A(-3{,}0), B(2{,}5)$ i $C(3{,}2)$.

8) Odrediti jednačinu prave koja:

   a) prolazi tačkom $T(-3{,}4)$ i ima koeficijent pravca $k = tg135^{\circ} \cdot \cos 240^{\circ} \cdot \sin 315^{\circ}$

   b) prolazi tačkom $T(2,-5)$ i okomita je na pravu $2x - y + 4 = 0$

9) Prave $-ax + y - 3 = 0, x - by + 2 = 0$ sijeku se u središtu kružnice $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 10 = 0$. Odrediti ugao između ove dvije prave.

10) Odrediti jednačinu kružnice koja sadrži tačke: $A(-6{,}5), B(-2{,}7)$ i $C(-5,-2)$.

11) Odrediti jednačinu one tangente na kružnicu $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 25$ koja je okomita na pravu $2x + 6y - 1 = 0$.

12) Elipsa $4x^2 + 25y^2 = 100$ prolazi tačkom $T\left(4, \frac{6}{5}\right)$. Odrediti jednačinu normale u toj tački na elipsu.

13) Odrediti ugao za koji treba da rotira prava $5x - 11y - 59 = 0$ oko svoje tačke $P(14, y)$ da bi postala tangenta elipse $x^2 + 4y^2 = 100$.

14) Odrediti jednačinu tangente na hiperbolu $4x^2 - 16y^2 = 64$ u njenoj tački $T(5, y), y < -5$.

15) Iz tačke $T(-2,-2)$ konstruisane su tangente na parabolu $y^2 = 16x$. Odrediti jednačine tangenti, te ugao između tih tangenti.

III grupa zadataka (viši nivo)

16) Zadane su tačke $A(-1{,}2), B(7{,}8)$ i prava $x - 3y - 3 = 0$. Svjetlosni zrak prolazi tačkom A i poslije refleksije na zadanoj pravoj prolazi kroz tačku B. Naći jednačine upadnog i reflektiranog zraka.

17) Odrediti najmanju udaljenost prave $4x + 3y - 27 = 0$ od kružnice $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$.

18) Data je kružnica k sa središtem u tački $S\left(3, -\frac{3}{2}\right)$. Prave $t_1 : y = -2x + 2$ i $t_2 : y = -2x + 7$ su tangente kružnice k. Odrediti površinu četverougla ograničenog pravim t_1, t_2, osom O_y i prečnikom kružnice k okomitim na pravu t_1.

19) Poprečni presjek rakete je u obliku elipse kojoj je velika osa $4{,}8m$, a mala osa $4{,}2m$. U nju treba staviti meteorološki satelit koji je u presjeku pravougaonog oblika. Koliko najviše satelit može biti širok ako mu je dužina $4{,}4m$.

20) Dat je skup svih tačaka u ravni koje su jednako udaljene od tačke $T(4{,}0)$ i prave $x = -4$. Napisati jednačinu tog skupa tačaka i skicirati ga u pravouglom koordinatnom sistemu.

4.3.1 Rješenja zadataka i upute

I grupa zadataka (niži nivo – zadaci višestrukog izbora)

1) b)
2) d)
3) c)
4) c)
5) b)

II grupa zadataka (srednji nivo)

6) $P = 24$
7) $\overline{BD} = \sqrt{10}$
8) a) $\sqrt{2}x + 4y - 16 + 3\sqrt{2} = 0$

   b) $x + 2y + 8 = 0$
9) $a = -5, b = -\frac{3}{2}$, tražene prave su: $y = -5x + 3$ i $y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$, a traženi ugao $\alpha = 45°$
10) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 25$
11) Tražene tangente su: $y = 3x - 10 + 5\sqrt{10}$ i $y = 3x - 10 - 5\sqrt{10}$.

12) Jednačina tangente u tački $T\left(4, \frac{6}{5}\right)$ je $8x + 15y - 50 = 0$, a jednačina tražene normale $75x - 40y - 252 = 0$.

13) Tražene prave su: $2x - 3y - 25 = 0$ ili $3x + 8y - 25 = 0$, dok su traženi uglovi: $\alpha_1 = arctg\,\frac{7}{43}$ ili $\alpha_2 = 45°$.

14) $5x + 6y - 16 = 0$

15) Jednačine tangenti su: $2x - y + 2 = 0$ i $x + y + 4 = 0$, a ugao između tangenti iznosi $arctg(-3)$

III grupa zadataka (viši nivo)

16) $x + 2y - 3 = 0$ i $2x - y - 6 = 0$

17) Najmanja udaljenost prave od kružnice je udaljenost presjeka normale s pravom i zadanom kružnicom. Jednačina normale je $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$, a presječna tačka normale i kružnice $D\left(\frac{14}{5}, \frac{18}{5}\right)$, te tražena udaljenost iznosi $d = 1$.

18) $P = 15$

19) Širina satelita iznosi $1{,}6785 \approx 1{,}7$

20) Traženi skup tačaka je parabola $y^2 = 16x$

4.4 LINEARNE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE. SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

I grupa zadataka (niži nivo – zadaci višestrukog izbora)

1) Za koju vrijednost realnog parametra t jednačina $\frac{3t+2}{x+1} = 3 + 3t$ ima pozitivno rješenje?

   a) $t > 1$ b) $t < -1$ c) $1 < t < 7$ d) $0 < t < 1$

2) Ako jednačina $3m - mx = 6m - 3x$ ima cjelobrojno rješenje (gdje je $m \in \mathbb{Z}$ cjelobrojni parametar), jedno od njenih rješenja iznosi:

   a) -1 b) -2 c) 1 d) 3

3) Skup svih rješenja nejednačine $\frac{1}{x+1} \leq \frac{x}{x+1}$ jest:

   a) $x \in [1, +\infty)$ b) $x \in (-1, 1]$ c) $x \in (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$

   d) $x \in (-\infty, -1] \cup x \in [1, +\infty)$

4) Neka je S skup svih rješenja nejednačine $3x - 1 > 2$, a T skup svih rješenja nejednačine $\frac{x-1}{2x-3} < 0$. Tada je:

   a) $S = \emptyset$ b) $T = \emptyset$ c) $S \setminus T = \emptyset$ d) $T \setminus S = \emptyset$

5) Vrijednost parametra m tako da sistem jednačina

$$mx + 3y = 1$$

$$2x - \sqrt{3}y = 7$$ nema rješenje je:

   a) $m = 2\sqrt{3}$ b) $m = 3$ c) $m = -3$ d) $m = -2\sqrt{3}$

II grupa zadataka (srednji nivo)

6) Riješiti jednačine:

   a) $\frac{7}{x^2-1} + \frac{8}{x^2-2x+1} = \frac{37-9x}{x^3-x^2-x+1}$

b) $\frac{2}{y^2-4}-\frac{1}{y^2-4y+4}-\frac{1}{y^2+5y+6}=0$

7) Riješiti jednačine:

a) $|2x-3|=x+2$

b) $|x|+|1-x|=10$

c) $|x+2|+|x-3|=5$

8) Riješiti jednačinu:

$$|5x+3|=\frac{|3-\sqrt{2}|}{|\sqrt{3}-3|+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{3}$$

9) Data je jednačina $2x+1=ax-3$

a) Odrediti rješenje date jednačine u ovisnosti od realnog parametra a

b) Za koje vrijednosti parametra a je rješenje jednačine prirodan broj?

10) Riješiti jednačinu i diskutovati rješenja u zavisnosti od realnog parametra a:

a) $a(ax+1)=2(2x-1)$

b) $(a^2-4a+3)(x-1)=a-1$

11) Riješiti nejednačinu:

$$\frac{4}{4x^2-9}+\frac{x}{2x-3}>\frac{1}{2x^2+3x}$$

12) Riješiti nejednačine:

a) $\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\geq 2$ b) $\left|\frac{x-3}{x+2}\right|\leq 3$

13) Riješiti nejednačine:

a) $|4-2x|<x+1$ b) $|x-2|+|4-x|\leq 6$

14) Ako je $\frac{1}{\frac{1}{x-y}-3}=-\frac{3}{8}$ i $\frac{1}{1-\frac{1}{x+y}}=\frac{7}{6}$ odrediti vrijednost $x+y$

15) Riješiti sistem jednačina:

$$\frac{3}{x+2y-2}+\frac{2}{2x-y-3}=7$$
$$\frac{6}{x+2y-2}-\frac{2,5}{2x-y-3}=1$$

III grupa zadataka (viši nivo)

16) U prodavnicu je došla određena količina svježih jaja. Jaja mogu biti pakovana u kutijama po 10 komada ili na kartonima po 30 komada. Koliko je stiglo kutija, a koliko kartona ako znamo da je stiglo 1010 komada jaja, te ukupno 37 pakovanja?
17) Dva automobila su istovremeno krenula iz dva mjesta jedan drugom u susret. Kada su se sreli, jednom je bilo potrebno da bude na putu još $2h$, a drugom $\frac{9}{8}h$. Odrediti njihove brzine, ako je rastojanje između ta dva mjesta $210\ km$.
18) U jednoj porodici svaki sin ima isto toliko braće koliko i sestara, a svaka kćerka ima dva puta više braće nego sestara. Koliko ima djece u porodici?
19) Na testu iz matematike se za svaki tačan odgovor dobija 15 bodova, a za netačan odgovor se odbija 5 bodova. Test sadrži 40 pitanja. Koliko tačnih odgovora ima učenik koji je odgovorio na sva pitanja i postigao 280 bodova?
20) Riješiti sistem u zavisnosti od realnog parametra a:

$$(a-2)x+(a-3)y=3$$
$$(a^2-4)x+(a-3)y=a+4$$

Odrediti vrijednosti realnog parametra a tako da rješenja x i y zadovoljavaju uslov $x-y\leq 2$.

4.4.1 Rješenja zadataka i upute

I grupa zadataka (niži nivo – zadaci višestrukog izbora)

1) b)
2) b)
3) c)
4) d)
5) d)

II grupa zadataka (srednji nivo)

6) a) $x = \frac{3}{2} (x \neq \pm 1)$

b) $y = 22 (y \neq -3, y \neq \pm 2)$

7) a) $x_1 = 5 \lor x_2 = \frac{1}{3}$

b) $x_1 = \frac{11}{2} \lor x_2 = -\frac{9}{2}$

c) $-2 \leq x \leq 3$

8) $x_1 = -\frac{2}{5} \lor x_2 = -\frac{4}{5}$

9) a) $x = \frac{4}{a-2}$

b) $a - 2$ treba biti pozitivan djelilac od 4, pa je rješenje $a \in \{3,4,6\}$

10) a) za $a \neq 2$ i $a \neq -2$ jednačina ima jedinstveno rješenje i ono iznosi $x = \frac{1}{2-a}$

za $a = 2$ jednačina nema rješenja

za $a = -2$ jednačina ima beskonačno mnogo rješenja

b) za $a \neq 1$ i $a \neq 3$ jednačina ima jedinstveno rješenje i ono iznosi $x = \frac{a-2}{a-3}$

za $a = 3$ jednačina nema rješenja

za $a = 1$ jednačina ima beskonačno mnogo rješenja

11) $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$

12) a) $x \in [-4, -1) \cup (-1, 0]$

b) $x \in \left(-\infty, \frac{9}{2}\right] \cup \left[-\frac{3}{4}, +\infty\right)$

13) a) $x \in (1,5)$

b) $x \in [0,6]$

14) $x = 5, y = 2$ pa je vrijednost izraza $x + y = 7$

15) $(x, y) = \left(2, \frac{1}{2}\right)$

III grupa zadataka (viši nivo)

16) 5kutija i 32 kartona

17) Neka je brzina jednog automobila $x\ \frac{km}{h}$. Poslije susreta on treba da putuje još $2h$, dakle treba da pređe još $2x\ km$. Drugi automobil, poslije susreta, treba da pređe još

$(210-2x)\ km$ i za to mu je potrebno $\frac{9}{8}h$, pa je njegova brzina $(210-2x):\frac{9}{8}$. Kako su do susreta imali isto vrijeme, to je $\frac{210-2x}{x}=\frac{2x}{(210-2x):\frac{9}{8}}$, odnosno

$(105-x)^2=\left(\frac{3x}{4}\right)^2$. Odavde slijedi da je:

$105-x=\frac{3x}{4}$ ili $105-x=-\frac{3x}{4}$ tj. $x=60\ \frac{km}{h}$ ili $x=420\frac{km}{h}$. Ovaj drugi slučaj otpada, pa je brzina jednog automobila $60\ \frac{km}{h}$, a drugog $(210-2\cdot 60):\frac{9}{8}=80\frac{km}{h}$.

18) $x=4$ broj sinova, a $y=3$ broj sestara, pa zaključujemo da je ukupno sedmero djece u porodici.

19) Broj tačnih odgovora iznosi 24

20) $x=\frac{1}{a-2}, y=\frac{2}{a-3}$,

$a\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$

4.5 KVADRATNE FUNKCIJE, JEDNAČINE I NEJEDNAČINE. JEDNAČINE VIŠEG REDA. IRACIONALNE JEDNAČINE

I grupa zadataka (niži nivo – zadaci višestrukog izbora)

1) Najmanja vrijednost funkcije $y = x^2 + 6x + 10$ je:

   a) 1 b) -3 c) 10 d) nema najmanje vrijednosti

2) Vrijednost parametra m tako da rješenja kvadratne jednačine $mx^2 - 2(m-1)x + m - 1 = 0$ budu konjugovano kompleksna iznosi:

   a) $m < 1$ b) $m > 1$ c) $m < -1$ d) $m > -1$

3) Ako su x_1 i x_2 korijeni jednačine $2x^2 + 5x - 4 = 0$, tada je vrijednost izraza $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ jednaka:

   a) $-\frac{5}{4}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{5}{4}$ d) $\frac{\sqrt{57}}{2}$

4) Korijeni jednačine $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ su:

   a) 9 i -1 b) ± 3 i $\pm i$ c) ± 3 d) 1 i -9

5) Rješenja nejednačine $4x^2 - 16 \leq 0$ su:

   a) $x \leq -2$ b) $x \leq \pm 2$ c) $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ d) $x \in [-2,2]$

II grupa zadataka (srednji nivo)

6) Odrediti kvadratnu funkciju ako tačke $A(4,-2), B(6,0)$ i $C(8,6)$ pripadaju njenom grafiku, te ispitati promjene i nacrtati grafik te funkcije.

7) Riješiti jednačine:

   a) $\frac{5}{4x^2-36} + \frac{1}{5x} = \frac{1}{4x+12} - \frac{1}{3x-x^2}$

   b) $\frac{2x-1}{x^2+2x-3} - \frac{3x+1}{x^2-6x+5} = \frac{x-20}{x^2-2x-15}$

8) Riješiti jednačine:

a) $(x^2 + 2x)^2 - (x+1)^2 = 55$

b) $\frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2+1} = 2{,}9$

c) $7\frac{x^2-4}{x^2+x+1} - 5\frac{x^2+x+1}{x^2-4} + 2 = 0$

9) Riješiti jednačine:

a) $12x^3 - 37x^2 + 37x - 12 = 0$

b) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

10) Riješiti nejednačine:

a) $\frac{x^2-x+1}{2x^2-x-1} \leq \frac{1}{2}$ b) $\frac{x^2}{2x-x^2} \geq 1$

11) Riješiti sljedeće jednačine i nejednačine:

a) $x^2 - 9x - |x-5| + 21 = 0$

b) $|x^2 - x - 2| = 2x^2 + 3x + 1$

c) $|x-6| < x^2 - 5x + 9$

d) $|x^2 - 6x + 8| \leq 4 - x$

12) U kvadratnoj jednačini $x^2 - (m+3)x + m + 2 = 0$ odrediti parametar m tako da rješenja jednačine zadovoljavaju uslov: $\frac{x_1}{x_1+1} + \frac{x_2}{x_2+1} = \frac{13}{10}$.

13) Odrediti sve vrijednosti realnog parametra a za koje jednačina:

$$\frac{2x}{a^2+3a} - \frac{1}{3a-a^2} = \frac{x^2+8}{a^2-9}$$

ima realna rješenja po x.

14) Riješiti sljedeće iracionalne jednačine:

a) $\sqrt{x+1} = 11 - x$

b) $3\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} = 7$

15) Riješiti sljedeće iracionalne jednačine:

a) $\sqrt{5x+7} - \sqrt{2x+3} = \sqrt{3x+4}$

b) $\sqrt[3]{3x+2} + \sqrt[3]{7-3x} = 3$

III grupa zadataka (viši nivo)

16) Odrediti vrijednost realnog parametra m tako da rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednačine $x^2+(m-3)x+1-2m=0$ zadovoljavaju uslov $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+6=0$.

17) Odrediti realan broj p tako da rješenja jednačine $p(x^2+2)=px+3$ zadovoljavaju nejednakost $\left|\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\right|<3$.

18) Odrediti sve vrijednosti realnog parametra p za koje je kvadratna funkcija $f(x)=(p^2+2p-3)x^2-4px+p$ pozitivna za sve vrijednosti realne promjenjive x.

19) Jedan turista je krenuo iz mjesta A u mjesto B u 6 sati. Drugi je krenuo iz mjesta B u mjesto A u 7 sati. Sreli su se u 8 sati. Prvi turista je u mjesto B stigao 28 minuta kasnije nego drugi u mjesto A. Koliko je vremena svaki od njih proveo u putu?

20) Riješiti iracionalnu jednačinu:

$$\sqrt{x+3-2\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+27-10\sqrt{x+2}}=4$$

4.5.1 Rješenja zadataka i upute

I grupa zadataka (niži nivo – zadaci višestrukog izbora)

1) a)
2) b)
3) c)
4) b)
5) d)

II grupa zadataka (srednji nivo)

6) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-4x+6$

7) a) $x_1=8,\ x_2=12$

   b) $x_1=-3i,\ x_2=3i$

8) a) $x_1=-4,\ x_2=2,\ x_{3,4}=-1\pm i\sqrt{6}$ (Uputstvo smjena: $x^2+2x=t$)

   b) $x_1=\frac{1}{2},\ x_2=2,\ x_{3,4}=\frac{1\pm 2i\sqrt{6}}{5}$ (Uputstvo smjena: $\frac{x^2+1}{x}=t$)

   c) $x_1=1,\ x_2=-\frac{3}{2},\ x_3=-3,\ x_4=\frac{11}{2}$ (Uputstvo smjena: $\frac{x^2-4}{x^2+x+1}=t$)

9) a) $x \in \left\{1, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}\right\}$

b) $x \in \left\{-3, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2\right\}$

10) a) $x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \cup [3, +\infty)$

b) $x \in [1,2)$

11) a) $x = 4$

b) $x = -3, x = -1, x = \frac{1}{3}$

c) $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

d) $x \in (1,3) \cup \{4\}$

12) $m = 2$

13) $a \in \left[-\frac{3}{2}, 1\right]$

14) a) $x = 8$

b) $x = 6$

15) a) $x = -\frac{4}{3}$

b) $x = -\frac{1}{3}, x = 2$

III grupa zadataka (viši nivo)

16) $m = 1, m = 13$

17) Iz $2|p-2| < |2p-3|$, $p \neq \frac{3}{2}$ slijedi $p > \frac{7}{4}$

18) $p > 3$

19) Neka je t vrijeme koje je proveo drugi turista u putu izraženo u minutama. Tada je $t + 88$ vrijeme u minutama koje je prvi turista proveo u putu. Brzina prvog je $v_1 = \frac{s}{t+88}$, a brzina drugog je $v_2 = \frac{s}{t}$. Kako su se susreli u 8 sati, put do susreta prvog je $\frac{s}{t+88} \cdot 120$, a za drugog $\frac{s}{t} \cdot 60$. U trenutku susreta oni su zajedno prešli cjelokupno rastojanje:

$$\frac{s}{t+88} \cdot 120 + \frac{s}{t} \cdot 60 = s$$

Odavde dobijamo da je $t = 132\ min$. To je vrijeme koje je drugi turista proveo u putu, a vrijeme prvog turiste je $132 + 88 = 220\ min$.

20) $x \in [-1,23]$ Uputstvo smjena: $\sqrt{x+2} = t,\ t > 0$

4.6 EKSPONENCIJALNE FUNKCIJE, JEDNAČINE I NEJEDNAČINE. LOGARITAMSKE FUNKCIJE, JEDNAČINE I NEJEDNAČINE

I grupa zadataka (niži nivo – zadaci višestrukog izbora)

1) Koja od tačaka pripada funkciji $f(x) = 3^x \cdot 3^{x-1} \cdot \frac{1}{3}$?

a) $(-1,3)$ b) $(1,3)$ c) $\left(0,\frac{1}{9}\right)$ d) $(0,9)$

2) Recipročna vrijednost rješenja jednačine $\frac{5^x-5^{-x}}{5^x+5^{-x}} = \frac{2}{3}$ iznosi:

a) -1 b) 2 c) 1 d) 3

3) Oblast definisanosti funkcije $f(x) = \log_2\left(\frac{2-x}{3x+2}\right)$ je:

a) $\left(-\frac{2}{3},2\right)$ b) $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right) \cup (2,+\infty)$ c) $\mathbb{R}$ d) $\emptyset$

4) Vrijednost izraza $\frac{\log_a 8}{2\log_a 2}$ jednaka je:

a) $\frac{1}{2}\log_a 4$ b) $\log_a 2$ c) 2 d) $\frac{3}{2}$

5) Rješenje nejednačine $\log_{\frac{3}{4}}(-x^2 + x - 1) > 0$ iznosi:

a) $x \in \left(-\infty,\frac{3}{4}\right)$ b) $x \in (0,+\infty)$ c) $\forall x \in \mathbb{R}$ d) nema rješenja

II grupa zadataka (srednji nivo)

6) Izračunati vrijednost izraza:

a) $\log_{\frac{1}{4}}(\log_2 3 \cdot \log_3 4)$

b) $\log_{0,25}\log_{\sqrt{5}} 25 + \log_8 \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{3}}$

7) Izračunati vrijednost izraza:

a) $\log_4\left(\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1\right) - \log_{0,25}\left(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1\right)$

b) $\log_{0,75}\log_{2\sqrt{2}}\left(20\cdot\sqrt[3]{4}\cdot 3^{-\log_9 25}\right)$

8) Riješiti sljedeće eksponencijalne jednačine:

a) $\left(\frac{25}{9}\right)^{x}\cdot(0,6)^{x^2+x}=0,36$

b) $9^{-1,5}\cdot\sqrt{27^{2x-1}}=3^{2x-1}$

c) $3\cdot 4^{x}+\frac{1}{3}\cdot 9^{x+2}=6\cdot 4^{x+1}-\frac{1}{2}\cdot 9^{x+1}$

9) Riješiti sljedeće eksponencijalne jednačine:

a) $2^{2x-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2-2x}+4^{x+1}-\sqrt{\frac{1}{4^{3-2x}}}=74$

b) $3\cdot 9^{\sqrt{x}}-28\cdot 3^{\sqrt{x}}+9=0$

c) $64^{\frac{1}{x}}+2^{2+\frac{3}{x}}-12=0$

10) Riješiti sljedeće eksponencijalne nejednačine:

a) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{1}{1-x}}\cdot(0,75)^{x-1}>\sqrt{\frac{4}{3}}$

b) $(0,5)^{x^2+3x}\leq 0,125\cdot 2^{-x}$

c) $5^{x}-3^{x+1}>2(5^{x-1}-3^{x-2})$

11) Riješiti sljedeće eksponencijalne nejednačine:

a) $2^{x}+2\cdot 2^{-x}-3<0$

b) $3^{x}-3^{\frac{1}{2}-x}>\sqrt{3}-1$

c) $2^{-x}(0,5^{x}+2^{x+3}-6)\leq 0$

12) Riješiti sljedeće logaritamske jednačine:

a) $\log_2\{4\log_5[2+\log_2(4+\log_3 x)]\}=2$

b) $\frac{\log(2x-5)}{\log(x^2-8)}=\frac{1}{2}$

c) $\log_{\sqrt{2}}(x-3)+\log_{\frac{1}{2}}(4-x)+1=0$

13) Riješiti sljedeće logaritamske jednačine:

a) $\log x^3\cdot\log(0,1x)=2-\log x^2$

b) $x^{\frac{\log x+5}{3}}=10^{5+\log x}$

c) $\log_{3x}\frac{3}{x}+(\log_3 x)^2=1$

14) Riješiti sljedeće logaritamske nejednačine:

a) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{3x+1}{2x-1} \leq 0$

b) $\log_{\frac{1}{2}} \left(\log_3 \frac{x+1}{x-1} \right) \geq 0$

c) $\log_{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2} \right) + \log_{\frac{1}{2}} (x-1) \geq 1$

15) Riješiti sljedeće logaritamske nejednačine:

a) $(\log_2 (2-x))^2 - 8 \log_{\frac{1}{4}} (2-x) \geq 5$

b) $\left(\log_{\frac{1}{2}} x \right)^2 + \log_{\frac{1}{2}} x - 2 \geq 0$

c) $\log_3 (3^{4x} - 3^{2x+1} + 3) < 2 \log_9 7$

III grupa zadataka (viši nivo)

16) Odrediti vrijednost realnog parametra a tako da jednačina $(a-1)4^x - 4 \cdot 2^x + (a+2) = 0$ ima samo jedno rješenje.

17) *Ako sa p_0 i p_h označimo pritisak zraka u dva mjesta s nadmorskom visinskom razlikom h, tada vrijedi:*

$$p_h = p_0 \cdot e^{-k \cdot h}$$

pri čemu je k konstanta i ona približno iznosi $1{,}25 \cdot 10^{-4} m^{-1}$

Zadatak je sljedeći: Koliki je pritisak zraka na vrhu $80\ m$ visokog nebodera, ako je u njegovom podnožju izmjeren pritisak 1000 milibara?

18) Izračunati vrijednost izraza A ako je:

$$A = 5^{\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{2}} + \log_{\sqrt{2}} \frac{4}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{10 + 2\sqrt{21}}$$

19) Riješiti sljedeće eksponencijalne jednačine:

a) $4^{x - \sqrt{x^2-5}} - 12 \cdot 2^{x-1-\sqrt{x^2-5}} + 8 = 0$

b) $2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1} = 0$

c) $2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}} - 6 \left(2^x - \frac{1}{2^{x-1}} \right) = 1$

20) Riješiti sljedeće logaritamske jednačine:

a) $3\log_3 \log_4 \frac{4x-1}{x+1} - \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{4}} \frac{x+1}{4x-1} = 4$

b) $5\log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{9}{x}} x^3 + 8\log_{9x^2} x^2 = 2$

4.6.1 Rješenja zadataka i upute

I grupa zadataka (niži nivo – zadaci višestrukog izbora)

1) c)
2) b)
3) a)
4) d)
5) d)

II grupa zadataka (srednji nivo)

6) a) $-\frac{1}{2}$
   b) $-\frac{4}{3}$
7) a) $\frac{3}{4}$
   b) -2
8) a) $x_1 = -1,\ x_2 = 2$
   b) $x = \frac{7}{2}$
   c) $x = -\frac{1}{2}$
9) a) $x = 4$
   b) $x = 3$ Uputstvo smjena: $3^{\sqrt{x}} = t,\ t > 0$
   c) $x = 3$ Uputstvo smjena: $3^{\frac{3}{x}} = t,\ t > 0$
10) a) $x \in (-\infty, 0) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right)$
    b) $x \in (-\infty, -3] \cup (1, +\infty)$
    c) $x \in (3, +\infty)$
11) a) $x \in (0,1)$
    b) $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

c) $x \in (-2, -1)$

12) a) $x = 81$

b) $x = \frac{11}{3}$

c) $x = \frac{7}{2}$

13) a) $x_1 = 10,\ x_2 = 10^{-\frac{2}{3}}$

b) $x_1 = 10^{-5},\ x_2 = 10^3$

c) $x = \frac{1}{9},\ x = 1,\ x = 3$

14) a) $x \in -\infty, -2] \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

b) $x \in [2, +\infty)$

c) $x \in \left(1, \frac{3}{2}\right]$

15) a) $x \in (-\infty, 0] \cup \left[\frac{63}{32}, 2\right)$

b) $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \cup [4, +\infty)$

c) $x < \log_2 3$

III grupa zadataka (viši nivo)

16) $D = 16 - 4(a-1)(a+2) = 0$ tj. $a^2 + a - 6 = 0$, pa je rješenje za $a = 2$ i ono iznosi $x = 1$.

17) $p_h = 990\ milibara$

18) 6

19) a) $x_1 = \frac{9}{4},\ x_2 = 3$

b) $x_1 = 0,\ x_2 = -1$

c) $x = 1$

20) a) $x = -\frac{13}{12}$

b) $x = \sqrt{3},\ x = 3$

4.7 TRIGONOMETRIJA

I grupa zadataka (niži nivo – zadaci višestrukog izbora)

1) Mjera ugla je $162°$. Koliko je to radijana?

   a) $\frac{9\pi}{10}$ b) $\frac{10\pi}{9}$ c) $\frac{9\pi}{20}$ d) $\frac{20\pi}{9}$

2) Izraz $\frac{2\sin\alpha\sin(90°-\alpha)}{\cos\alpha-\cos(180°-\alpha)}$ za $\alpha \in [0,90°)$ je jednak:

   a) $\cos\alpha$ b) $\sin\alpha$ c) $2\sin\alpha$ d) 1

3) Ako je α oštar ugao i $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, vrijednost izraza $\cos\alpha + \sin\alpha \cdot tg\alpha$ iznosi:

   a) $\frac{3}{5}$ b) $-\frac{5}{3}$ c) $\frac{5}{3}$ d) $-\frac{3}{5}$

4) Koliko rješenja ima jednačina $2\sin 3x + 1 = 0$ na intervalu $[0,\pi]$?

   a) jedno b) dva c) tri d) četiri

5) Vrijednost izraza $\frac{\cos 35°+\cos 85°}{\cos 65°}$ iznosi:

   a) $tg35°$ b) $\cos 24°$ c) $ctg25°$ d) $tg60°$

II grupa zadataka (srednji nivo)

6) Za funkciju $f(x) = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ odrediti period, nule, ekstreme i skicirati grafik date trigonometrijske funkcije u koordinatnom sistemu.

7) Ako je $f(x) = (\cos x)^4 + (\sin x)^4$ i ako postoji realan broj $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$, izračunati $f(\alpha)$.

8) Uprostiti izraze:

   a) $\frac{(\sin(180°+\alpha))^2}{\cos(270°+\alpha)-\sin(90°-\alpha)} - \frac{\cos(360°-\alpha)-\sin(\alpha-180°)}{1-\left(ctg(270°-\alpha)\right)^2}$

   b) $\frac{\sin 20°\cdot\cos 10°+\cos 160°\cdot\cos 100°}{\sin 21°\cdot\cos 9°+\cos 159°\cdot\cos 99°}$

c) $\frac{\cos\alpha+2\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\sin\alpha+2\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}$

9) Ako je $\alpha-\beta=60°,\ \sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{7},\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, izračunati $\sin\beta$, $\cos\beta$

10) Dokazati identitete:

a) $\frac{(1-\sin\alpha-\cos\alpha)(1-\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sin\alpha(1-\sin\alpha)}=-2$

b) $(\cos\alpha)^2+(\cos(60°+\alpha))^2+(\cos(60°-\alpha))^2=\frac{3}{2}$

c) $\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos 6\alpha}{\cos 2\alpha}=2(\cos 2\alpha-\cos 4\alpha)$

11) Riješiti sljedeće trigonometrijske jednačine:

a) $2(\cos x)^2+7\sin x-5=0$

b) $2(\sin 3x)^2+(\cos 3x)^2+\sin 3x=1$

c) $3\sin(2x+3)+\cos(4x+6)-2=0$

12) Riješiti sljedeće trigonometrijske jednačine:

a) $(\sin 3x)^2-3\sin 3x\cos 3x+2(\cos 3x)^2=0$

b) $(\sin x)^2-\left(\sqrt{3}+1\right)\sin x\cos x+\sqrt{3}(\cos x)^2=0$

c) $5(\sin x)^2+3\sin x\cos x-16(\cos x)^2=2$

13) Riješiti sljedeće trigonometrijske jednačine:

a) $\sin 5x+\cos 6x=\cos 2x-\sin 3x$

b) $\sin 7x\cdot\cos 3x=\sin 8x\cdot\cos 2x$

c) $\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=1$

14) Riješiti sljedeće trigonometrijske nejednačine:

a) $2(\cos x)^2-7\cos x+3>0$

b) $\frac{2(\sin x)^2+\sin x-1}{\sin x-1}<0$

15) Odrediti sve vrijednosti od x u intervalu $[0,2\pi]$ za koje je:

a) $4(\sin x)^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)\sin x+\sqrt{3}>0$

b) $4(\cos x)^2-2\left(1+\sqrt{2}\right)\cos x+\sqrt{2}\leq 0$

III grupa zadataka (viši nivo)

16) Dokazati identitete:

a) $\frac{2\sin\alpha-\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha-2\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}=-\frac{2\cos 2\alpha}{tg\frac{\alpha}{2}}$

b) $\frac{(\sin 2x-\sin 6x)+(\cos 2x-\cos 6x)}{\sin 4x-\cos 4x}=2\sin 2x$

17) Ako su α,β,γ unutrašnji uglovi trougla, dokazati da vrijede sljedeći identiteti:

a) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

b) $(\cos\alpha)^2+(\cos\beta)^2+(\cos\gamma)^2-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1$

18) U trouglu ΔABC dato je $\alpha=45°,\beta=60°$ i poluprečnik opisanog kruga $R=2\sqrt{6}$. Odrediti ostale osnovne elemente trougla.

19) Plivač pliva brzinom od $4\frac{km}{h}$. Kolika je njegova brzina ako pravac vodene struje, brzine $12\frac{km}{h}$, gradi sa pravcem kretanja plivača ugao od $115°$?

20) U valjak poluprečnika osnove $r=7\sqrt{3}$ i visine $H=20$ upisana je trostrana prizma čija je osnova trougao stranice $a=9$ i ugla $\beta=120°$. Izračunati zapreminu prizme.

4.7.1 Rješenja zadataka i upute

I grupa zadataka (niži nivo – zadaci višestrukog izbora)

1) a)
2) b)
3) c)
4) b)
5) c)

II grupa zadataka (srednji nivo)

6) Period date funkcije je $T=\frac{2\pi}{3}$.

Nule funkcije su: $x_1=\frac{\pi}{12},\ x_2=\frac{5\pi}{12},\ x_3=\frac{9\pi}{12}$

Ekstremi funkcije su: $x_{max}=\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$ i $x_{min}=-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$

7) Transformisati $(\cos x)^4+(\sin x)^4$, te dobijamo da je $f(\alpha)=\frac{7}{9}$.

8) a) $\frac{1}{\sin\alpha - \cos\alpha}$

b) 1

c) $ctg2\alpha$

9) $\sin\beta = \frac{3\sqrt{3}}{14},\ \cos\beta = \frac{13}{14}$

10) a) transformisati brojnik datog izraza

b) na lijevoj strani datog izraza primjeniti adicione formule

c) na lijevoj strani datog izraza staviti da je $\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha)$ i $\cos 6\alpha = \cos(4\alpha + 2\alpha)$, te onda primjeniti adicione formule

11) a) $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

b) $x_1 = \frac{k\pi}{3},\ x_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

c) $x = -\frac{3}{2} + \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ili $x = -\frac{3}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$

12) a) $x_1 = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3},\ x_2 = \frac{1}{3}(arctg2 + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$

b) $x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ x_2 = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $x_1 = arctg2 + k\pi,\ x_2 = arctg(-3) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

13) a) $x_1 = \frac{k\pi}{4},\ x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ x_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

b) $x_1 = k\pi,\ x_2 = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}$

c) $x = -\frac{\pi}{6} + (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$

14) a) smjena $\cos x = t,\ t \in [-1,1]$ pa su rješenja data sa

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) smjena $\sin x = t,\ t \in [-1,1]$ pa su rješenja data sa

$$x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$$

15) a) $0 < x < \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3},\ \frac{5\pi}{6} < x < 2\pi$

b) $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$

III grupa zadataka (viši nivo)

16) Transformisati lijeve strane u izrazima primjenom formula pretvaranja zbira i razlike u proizvod.
17) Transformisati lijeve strane u izrazima primjenom formula pretvaranja zbira i razlike u proizvod, te koristiti da je $\alpha + \beta + \gamma = \pi$
18) $a = 4\sqrt{2},\ b = 6\sqrt{2},\ c = 2\left(3 + \sqrt{3}\right), \gamma = 75°$
19) $v = 11\frac{km}{h}$
20) $V = 675\sqrt{3}$

4.8 GEOMETRIJA U PROSTORU

(Stereometrija, Vektori)

I grupa zadataka (niži nivo – zadaci višestrukog izbora)

1) Koliko iznosi zapremina kocke koja ima površinu jednaku površini kvadra čije su dimenzije $a = 4\ cm, b = 3\ cm,$ i $c = 6\ cm$?

   a) $54\ cm^3$ b) $54\sqrt{2}cm^3$ c) $54\sqrt{8}cm^3$ d) $72\ cm^3$

2) Valjku zapremine $80\pi\ cm^3$ i visine $5\ cm$, povećamo poluprečnik za $2\ cm$. Kolika je površina novog valjka?

   a) $19\pi\ cm^2$ b) $195\ cm^2$ c) $132\pi\ cm^2$ d) $192\ cm^2$

3) Koliki je poluprečnik lopte kojoj je zapremina $288\pi\ cm^3$?

   a) $7\ cm$ b) $8\ cm$ c) $6\ cm$ d) $9\ cm$

4) Zadani su vektori $\vec{a} = (1, -2, 0), \vec{b} = (3, 1, -5)$ i $\vec{c} = (4, 0, -1)$. Odrediti koordinate vektora $\vec{x}$ koji je rješenje jednačine $\vec{a} + \vec{b} = \vec{x} + \vec{c}$.

   a) $(0, -1, -4)$ b) $(0, -1, 2)$ c) $(0, 1, 3)$ d) $(0, 1, 0)$

5) Tačka O je presjek dijagonala paralelograma $ABCD$. Odrediti realan broj α za koji vrijedi jednakost $\overrightarrow{OB} = \alpha \cdot \overrightarrow{BD}$.

   a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $-\frac{3}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$

II grupa zadataka (srednji nivo)

6) Visina prave trostrane prizme je 5, a njena zapremina je 24. Naći osnovne ivice te prizme ako se površine njenih bočnih strana odnose kao $17 : 17 : 16$.

7) Baza piramide je trougao sa stranicama $a = 13, b = 14, c = 15$. Svaka bočna strana piramide nagnuta je pod uglom od $60°$ prema ravni baze. Izračunati površinu piramide.

8) Visina zarubljene piramide je 3. Njena zapremina je 76, a površine baza se odnose kao $4:9$. Izračunati te površine.
9) Omotač uspravnog valjka odnosi se prema površini valjka kao $3:5$. Kolika je zapremina valjka ako je poluprečnik baze za $9\ cm$ manji od visine?
10) U kosoj kupi najduža izvodnica dužine $s_1 = 6\sqrt{3}$ i najkraća izvodnica dužine $s_2 = 6$ zatvaraju ugao od $30°$. Izračunati zapreminu kupe.
11) Jednakokraki trapez čije su osnovice $3n$ i n, a ugao između kraka i veće osnovice $45°$, rotira oko veće osnovice. Izračunati zapreminu rotacionog tijela.
12) Obrtanjem romba oko njegove duže dijagonale nastaje tijelo zapremine dva puta manje od zapremine tijela koje nastaje obrtanjem romba oko njegove kraće dijagonale. Odrediti odnos dijagonala romba $d_1 : d_2 (d_1 > d_2)$.
13) Zadani su vektori $\vec{a} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$, $\vec{b} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ i $\vec{c} = 7\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$. Izraziti vektor $\vec{c}$ pomoću vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
14) Neka je $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ i $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$. Odrediti dužinu vektora $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.
15) Naći dužinu visine ΔABC iz tjemena B čiji su vrhovi dati sa $A(2,1,-1), B(2,5,-6)$ i $C(-1,1,3)$.

III grupa zadataka (viši nivo)

16) Dužine osnovnih ivica uspravne trostrane prizme jednake su $10\ cm, 17\ cm$ i $21\ cm$, a visina prizme je $10\ cm$. Izračunati površinu presjeka prizme sa ravni koja prolazi jednom bočnom ivicom i najvećom visinom baze.
17) Odnos dužina osnovne i bočne ivice pravilne četverostrane piramide je $3:4$. Koliki ugao s ravni baze piramide zatvara prava koja prolazi središtem baze i sredinom jedne bočne ivice?
18) U bazu uspravne kupe poluprečnika $r = 4$ i visine $H = 4$ upisan je kvadrat, koji s vrhom kupe određuje pravilnu četverostranu piramidu. Odrediti površinu omotača te piramide.

19) Neka je dat paralelogram $ABCD$ i neka je S presječna tačka dijagonala AC i BD. Pokazati da je $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{SB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$

20) Data su tjemena tetraedra $A(2,3,1), B(4,1,-2), C(6,3,7)$ i $D(-5,-4,8)$. Odrediti zapreminu tetraedra kao i dužinu visine spuštene iz tjemena D na stranu ABC.

4.8.1 Rješenja zadataka i upute

I grupa zadataka (nižinivo – zadaci višestrukog izbora)

1) b)
2) c)
3) c)
4) a)
5) d)

II grupa zadataka (srednji nivo)

6) $a = \frac{17}{5}, b = \frac{17}{5}, c = \frac{16}{5}$

7) Prema Heronovom obrascu, površina baze je $B = 84$, a poluprečnik upisane kružnice baze je $r = \frac{B}{s} = \frac{84}{21} = 4$. Kako su sve bočne strane pod istim uglom $(60°)$ nagnute prema ravni baze, to je podnožje visine piramide centar upisane kružnice. Iz relacije $\cos 60° = \frac{r}{h}$ slijedi $h = 2r = 8$. Površina piramide je

$P = B + \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} + \frac{ch}{2} = 84 + h \cdot s = 84 + 8 \cdot 21 = 252.$

8) $B_1 + \sqrt{B_1 \cdot B_2} + B_2 = 76,\ B_1 : B_2 = 4 : 9 \Rightarrow B_1 = 16 \wedge B_2 = 36$

9) Iz sistema $2r\pi H : (2r^2\pi + 2r\pi H) = 3 : 5,\ H = r + 9$ slijedi da je

$r = 8\ cm, H = 6\ cm, V = 384\pi\ cm^3.$

10) $V = 9\pi\sqrt{3}$ Uputstvo: Iskoristiti sinusnu i kosinusnu teoremu.

11) $V = \frac{5n^3\pi}{3}$

12) $d_1 : d_2 = 2 : 1$

13) $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$

14) $|\vec{c}| = 6$

15) $h_b = 5$

III grupa zadataka (viši nivo)

16) $P = 168\ cm^2$

17) Iskoristiti da je udaljenost središta baze piramide i sredine bočne ivice jednaka polovini dužine bočne ivice (Talesova teorema), te je $\cos\varphi = \frac{d}{2b} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$ a odavde je $\varphi = arccos\frac{3\sqrt{2}}{8}$ tj. $\varphi = 57{,}97°$.

18) $P = 32\sqrt{3}$

19) Iskoristiti kolinearnost vektora $\overrightarrow{AS}$ i $\overrightarrow{AC}$, kao i vektora $\overrightarrow{SB}$ i $\overrightarrow{DB}$, zatim linearnu nezavisnost vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$.

20) $V = \frac{154}{3},\ H = 11$

4.9 REALNE FUNKCIJE JEDNE PROMJENJIVE. DIFERENCIJALNI I INTEGRALNI RAČUN

I grupa zadataka (niži nivo – zadaci višestrukog izbora)

1) Ako je $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 2x, & x \geq 0 \end{cases}$ onda $f(\pi) : f(-2) + f(e)$ iznosi:

   a) $-\pi + 2e$ b) $\pi + 2e$ c) $\frac{\pi}{2} + 2e$ d) $\frac{\pi}{e+1}$

2) Zadane su funkcije $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $g(x) = 2x - 1$. Kompozicija $(g \circ f)(x)$ je:

   a) $\frac{x-3}{x+1}$ b) $\frac{x-1}{x+1}$ c) $\frac{x-1}{x}$ d) $\frac{2x-1}{2x+1}$

3) Koji je od sljedećih intervala definiciono područje funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x(x-2)}$?

   a) $[-1,2)$ b) $(0,2]$ c) $(-1,2)$ d) $[-1,0) \cup (0,2) \cup (2,+\infty)$

4) Inverzna funkcija funkcije $f(x) = -\log(x + \pi)$ je:

   a) $f^{-1}(x) = 10^{-x} - \pi$ b) $f^{-1}(x) = 10^{-x} + \pi$

   c) $f^{-1}(x) = 10^{x} - \pi$ d) $f^{-1}(x) = 10^{x} + \pi$

5) Period funkcije $y = (\cos x)^2$ iznosi:

   a) $\frac{\pi}{2}$ b) 2π c) π d) $\frac{\pi}{4}$

II grupa zadataka (srednji nivo)

6) Odrediti definiciono područje funkcije $y = \sqrt{\log \frac{2x-1}{1-3x}}$

7) Izračunati granične vrijednosti sljedećih funkcija:

   a) $\lim_{x\to -5} \frac{x^2+3x-10}{x+5}$

   b) $\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

   c) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{2x^2+5x+3} - \sqrt{2x^2-3x+4}\right)$

8) Izračunati granične vrijednosti sljedećih funkcija:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{3x \sin x}$

b) $\lim_{x\to \pi} \frac{1-\sin\frac{x}{2}}{x-\pi}$

c) $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x-4}{x+2}\right)^{3x}$

9) Odrediti asimptote sljedećih funkcija:

a) $f(x) = \frac{3-2x^2}{x-1}$

b) $f(x) = \frac{4x-x^2}{x^2-4x+3}$

c) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$

10) Data je funkcija $y = x^3 + ax^2 + bx - 1,\ (a, b \in \mathbb{R})$.

a) Odrediti realne brojeve a i b ako je $f(1) = -12$ i $f(-1) = 4$.

b) Za dobijene vrijednosti a i b odrediti $L = \lim_{x\to 3} \frac{f'(x)}{x-3}$

11) Odrediti jednačinu tangente na grafik funkcije $f(x) = -3x^2 + 2x - 1$ u njenoj tački s apscisom $x = -2$.

12) Odrediti jednačinu normale na krivu $y = \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$ u njenoj tački s apscisom $x = \frac{\pi}{3}$.

13) Odrediti izvode sljedećih funkcija:

a) Prvi izvod funkcije $y = ln((\sin x)^3) + ln((\cos x)^3)$

b) Drugi izvod funkcije $y = \sin x \cdot lnx$

14) Izračunati sljedeće integrale:

a) $\int \frac{(x-1)\,dx}{x^2-2x+5}$

b) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x+2}}$

c) $\int \frac{\sin 2x\,dx}{1+(\cos x)^2}$

15) Izračunati sljedeće integrale:

a) $\int x \cdot \sin 3x\,dx$

b) $\int \frac{arcsinx\,dx}{\sqrt{x+1}}$

c) $\int \frac{(2x+4)\,dx}{4x-x^2}$

III grupa zadataka (viši nivo)

16) Odrediti vrijednost parametara a, b, c pod uslovom da funkcija $y = \frac{ax^2+bx}{x+c}$ ima vertikalnu asimptotu $x = 1$ i kosu asimptotu $y = x - 4$.

17) Izračunati ugao pod kojim se sijeku krive: $x^2 + y^2 = 8x$ i $y^2 = \frac{x^3}{2-x}$

18) Dva tjemena pravougaonika nalaze se na krivoj $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, a druga dva na pravoj $y = 1$. Odrediti položaj tjemena na krivoj, tako da površina pravougaonika bude najveća.

19) Izračunati površinu površi ograničene osom O_y , parabolom $y = x^2 - 7x + 3$ i tangentom ove parabole, koja je paralelna sa pravom $5x + y + 1 = 0$.

20) Izračunati dužinu luka krive $y = \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} arcsinx,$ za $x \in [0,1]$

4.9.1 Rješenja zadataka i upute

I grupa zadataka (niži nivo – zadaci višestrukog izbora)

1) b)
2) a)
3) d)
4) a)
5) c)

II grupa zadataka (srednji nivo)

6) $x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{5}]$
7) a) -7

   b) 6

   c) $2\sqrt{2}$
8) a) $\frac{2}{3}$

   b) 0 Uputstvo: uvesti smjenu $x - \pi = t$

   c) e^{-18}

9) a) $x = 1,\ y = -2x - 2$

b) $x = 1,\ x = 3,\ y = -1$

c) $x = 2,\ y = x + 1$

10) a) $a = -3,\ b = -9$

b) $L = 12$

11) $y = 14x + 11$

12) $y = -\frac{\sqrt{6}}{3}x + \frac{\pi\sqrt{6}}{9} + \sqrt{2}$

13) a) $y' = 2ctg2x$

b) $y'' = -\sin x \cdot lnx + \frac{2\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$

14) a) $\frac{1}{2}ln(x^2 - 2x + 5) + C$

b) $\frac{2}{5}\sqrt{(x+2)^5} - \frac{8}{5}\sqrt{(x+2)^3} + 8\sqrt{x+2} + C$

c) $C - ln(1 + (\cos x)^2)$

15) a) $\frac{1}{9}\sin 3x - \frac{x}{3}\cos 3x + C$

b) $2\sqrt{x+1} \cdot arcsinx + 4\sqrt{1-x} + C$

c) $ln|x| - 3ln|4 - x| + C$

III grupa zadataka (viši nivo)

16) $a = 1,\ b = -5,\ c = -1$

17) $45°$ i $90°$

18) Površina je maksimalna za $x = 1,\ y = \frac{1}{2}$

19) Dodirnu tačku nalazimo iz uslova $y' = -5$ tj. $2x - 7 = -5$. Dodirna tačka je $T(1, -3)$. Jednačina tangente je $y = -5x + 2$, pa je:

$$P = \int_0^1 \left(x^2 - 7x + 3 - (-5x + 2)\right) dx = \frac{1}{3}$$

20) $y' = \sqrt{1 - x^2}$, a $1 + y'^2 = 2 - x^2$ pa je $s = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$

4. A Primjer ispita za nivo A (NPP za gimnazije)

1) Vrijednost izraza $\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}-\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}$ je:

   a) $2\sqrt{5}-4$ b) $2\sqrt{5}$ c) 0 d) -4

2) Dva trougla su slična sa koeficijentom sličnosti koji iznosi 3. Površina manjeg od njih iznosi 6 cm^2. Tada površina većeg od njih iznosi:

   a) $9\ cm^2$ b) $2\ cm^2$ c) $18\ cm^2$ d) $54\ cm^2$

3) Vrijednost parametra m tako da sistem jednačina

$$mx+3y=1$$

$$2x-\sqrt{3}y=7$$ nema rješenje je:

   a) $m=2\sqrt{3}$ b) $m=3$ c) $m=-3$ d) $m=-2\sqrt{3}$

4) Vrijednost izraza $\frac{\log_a 8}{2\log_a 2}$ jednaka je:

   a) $\frac{1}{2}\log_a 4$ b) $\log_a 2$ c) 2 d) $\frac{3}{2}$

5) Uprostiti izraz:

$$\frac{x}{ax-2a^2}-\frac{2}{x^2+x-2ax-2a}\cdot\left(1+\frac{3x+x^2}{x+3}\right)$$

6) Prave $-ax+y-3=0, x-by+2=0$ sijeku se u središtu kružnice $x^2+y^2-2x+4y-10=0$. Odrediti ugao između ove dvije prave.

7) U kvadratnoj jednačini $x^2-(m+3)x+m+2=0$ odrediti parametar m tako da rješenja jednačine zadovoljavaju uslov: $\frac{x_1}{x_1+1}+\frac{x_2}{x_2+1}=\frac{13}{10}$.

8) Riješiti sljedeću trigonometrijsku jednačinu:

$$5(\sin x)^2+3\sin x\cos x-16(\cos x)^2=2$$

9) Data su tjemena tetraedra $A(2,3,1), B(4,1,-2), C(6,3,7)$ i $D(-5,-4,8)$. Odrediti zapreminu tetraedra kao i dužinu visine spuštene iz tjemena D na stranu ABC.

10) Izračunati površinu površi ograničene osom O_y, parabolom $y=x^2-7x+3$ i tangentom ove parabole, koja je paralelna sa pravom $5x+y+1=0$.

5. Zadaci za nivo B sa rješenjima i uputama

5.0 Skup. Skupovi i operacije sa skupovima

a.Skupovi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, I, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

b.Omjeri, proporcije i procenti

c.Operacije u skupu kompleksnih brojeva

I grupa zadataka(niži nivo– zadaci višestrukog izbora)

1) Vrijednost izraza $\left|\frac{3}{4}-2\right|-\frac{11}{5}:11-5^0$ iznosi:

a) $-\frac{79}{20}$ b) $-\frac{49}{20}$ c) $\frac{1}{20}$ d) $\frac{21}{20}$

2) Vrijednost izraza $\left(\sqrt{100-36}-\sqrt{25}\right)^2:\sqrt[3]{27}-\left(1\frac{1}{3}\right)^2$ iznosi:

a) 5 b) $\frac{11}{9}$ c) $-\frac{11}{9}$ d) $\frac{9}{11}$.

3) Vrijednost izraza $z^4-5z^3+6z^2-5z-1$ za $z=-i$ iznosi:

a) 1 b) $2i-3$ c) -6 d) – i

4) Modul datog broja $z=\frac{i}{2}+\frac{1+i}{4}$ je:

a) $|z|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $|z|=\frac{\sqrt{5}}{2}$ c) $|z|=\frac{\sqrt{10}}{4}$ d) $|z|=\frac{\sqrt{2}}{4}$

5) Realni i imaginarni dio kompleksnog broja $z=\frac{i}{3}+\frac{1+i}{6}$ iznose:

a) $\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{6}, \mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2}$ b) $\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}, \mathrm{Im}(z)=\frac{1}{6}$

c) $\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{6}, \mathrm{Im}(z)=\frac{1}{3}$ d) $\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{3}, \mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2}$

II grupa zadataka (srednji nivo)

6) Izračunaj vrijednost izraza:

$$\left(\left(\frac{3}{4}-0{,}25\right):2-\frac{1}{8}:0{,}5\right):2\frac{1}{2}.$$

7) Izračunati vrijednost izraza :

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right):(a+b) \text{ za } a=-1\frac{3}{4} \quad i \quad b=0{,}8.$$

8) Koliko je 15% od aritmetičke sredine brojeva $\frac{7}{15}$ i $3\frac{2}{5}$?

9) Pri unosu hrane u organizam ugljikohidrati, masti i bjelančevine sudjeluju u ukupnom zbiru kalorija u omjeru 40:25:35. Koliko masti i bjelančevina treba uzeti ako smo unijeli 720 kalorija ugljikohidrata?

10) Izračunati vrijednost izraza:

$$\frac{(1+\mathrm{i})^2}{1-\mathrm{i}}+\frac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^2}.$$

11) Koliko iznosi $\mathrm{Im}(\mathrm{z})$ akoje

$$\mathrm{z}=\frac{(2-2\mathrm{i})(1+4\mathrm{i})}{2+\mathrm{i}}$$

12) Ako je $\mathrm{z}=1+4\mathrm{i}$, izračunati $\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{z}+\overline{\mathrm{z}}}\right)$.

13) Izračunati modul kompleksnog broja $\mathrm{z}=(1+\mathrm{i})^{-1}$.

14) Riješiti jednačinu:

$$(6-\mathrm{i})\mathrm{z}=-\mathrm{i}.$$

15) Rješiti jednačinu:

$$2\mathrm{z}-3\overline{\mathrm{z}}=1-\sqrt{-9}.$$

III grupa zadataka(viši nivo)

16) Odrediti nepoznate veličine iz uslova:

$$a : b = 7 : 8,\ c : d = 4 : 5,\ b : d = 4 : 5,\ a - 2b + d = 10.$$

17) Dat je kompleksan broj $z_1 = 2 + i$. Odrediti kompleksan broj $z = x + iy$ koji zadovoljava konjukciju:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z}{z_1}\right) = -\frac{3}{5} \quad \wedge \quad \mathrm{Im}(\bar{z} \cdot z_1) = 1$$

18) Odrediti kompleksan broj $z = x + iy$ koji zadovoljava sistem jednačina:

$$|z + 2i| = |z - 4i| \wedge |z - 4| = 1$$

19) Odrediti $|z|$ ako je

$$z = \frac{(3 - i)^3}{(2 - i)^3(1 - i)^3}$$

20) Odrediti kompleksan broj z, $z = x + iy$, iz uslova:

$$z + |z| = 2 + i.$$

5.0.1 Rješenja zadataka i upute

1) c) $\frac{1}{20}$
2) b) $\frac{11}{9}$
3) c) -6
4) c) $|z| = \frac{\sqrt{10}}{4}$
5) a) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{6}, \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2}$
6) 0,1;
7) $-\frac{5}{7}$;
8) $\frac{29}{100}$

9) 450 kalorija masti, 630 kalorija bjelančevina

10) $\frac{3}{2}(\mathrm{i}-1)$

11) $Im(z) = \frac{2}{5}$

12) $Re\left(\frac{z}{z+\overline{z}}\right) = \frac{1}{2}$

13) $|\mathrm{z}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

14) $\mathrm{z} = \frac{1}{37} - \frac{6}{37}\mathrm{i}$

15) $\mathrm{z} = -1 - \frac{3}{5}\mathrm{i}$

16) Uputstvo: Nakon proširivanja datih proporcija odgovarajućim brojevima dobijamo produženu proporciju $\mathrm{a}:\mathrm{b}:\mathrm{c}:\mathrm{d} = 14:16:25:20$. Uvodeći broj k dobijamo $\mathrm{a} = 14\mathrm{k}$, $\mathrm{b} = 16\mathrm{k}, \mathrm{c} = 25\mathrm{k}, \mathrm{d} = 20\mathrm{k}$, pa uslov $\mathrm{a} - 2\mathrm{b} + \mathrm{d} = 10$, odakle je $\mathrm{k} = 5$. Dakle $\mathrm{a} = 70, \mathrm{b} = 80, \mathrm{c} = 125$ i $\mathrm{d} = 100$.

17) $\mathrm{z} = -1 - \mathrm{i}$

18) $\mathrm{z} = 4 + \mathrm{i}$

19) 1

20) $\mathrm{z} = \frac{3}{2} - 2\mathrm{i}$

5.1 Stepeni i korijeni

I grupa zadataka (niži nivo– zadaci višestrukog izbora)

1) Vrijednost izraza $5\sqrt{2}+3\sqrt{8}-\sqrt{50}\ -\sqrt{98}$ iznosi:

   a) $-\ 2\sqrt{2}$ b) $13\sqrt{2}$ c)$-13\sqrt{2}$ d) $-\sqrt{2}$

2) Vrijednost izraza $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{x^5}}:\sqrt{\sqrt[6]{x^{11}}}$ iznosi:

   a)$\sqrt[12]{x}$ b)1 c)$\sqrt[6]{x^{11}}$ d) $\sqrt[12]{x^5}$

3) Vrijednost izraza $25^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{27}^{-\frac{2}{3}}+1000^{\frac{1}{3}}$ iznosi:

   a) $\frac{1}{6}$ b)$\frac{5}{6}$ c) -5 d)$\frac{6}{5}$

4) Vrijednost izraza $\frac{1}{\sqrt{5}-2}-\frac{1}{\sqrt{5}+2}$ iznosi:

   a) -4 b) 0 c) 1 d) 4

5) Vrijednost izraza $\frac{3^{-2}-\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}}{2-\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}$ iznosi:

   a) $\frac{5}{9}$ b)$\frac{15}{3}$ c)$-\frac{15}{3}$ d) $\frac{1}{9}$

II grupa zadataka (srednji nivo)

6) Izračunati vrijednost izraza:

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{2^{-1}}+2^{-3}-\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}:\frac{1}{2^{-3}}\right]^{-1}.$$

7) Uprostiti izraz:

$$\left[(a^{-1})^{-\frac{2}{3}}\cdot(ab^{-2})^{-\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{3}{2}}b\right]^{3}$$

8) Uprostiti izraz:

$$\frac{(a^{-2})^3 \cdot (b^{-1})^4 : (a^{-7} \cdot (b^{-2})^{-3})}{ab^{-2}}, a \neq 0, b \neq 0$$

9) Uprostiti izraz:

$$\left(\frac{a^{-1} + b^{-1}}{a^{-2} - b^{-2}}\right)^{-2} : \left(\frac{a^{-2} + b^{-2}}{a^{-4} - b^{-4}}\right)^{-2}.$$

10) Uprostiti izraz:

$$\left(\frac{x}{a + x}\right)^{-m} : \left(\frac{x}{a - x}\right)^{-m} \cdot \left(\frac{a - x}{a + x}\right)^{m}$$

11) Uprostiti izraz:

$$6\left(\sqrt[4]{\frac{5x^3}{8y}} : \sqrt[6]{\frac{25x^4}{32y}}\right) \cdot \sqrt[12]{\frac{5x}{2y}} + 3\sqrt[6]{\frac{x}{y}}$$

12) Izračunati:

$$3 \cdot \sqrt[4]{a \cdot \sqrt[3]{a \cdot \sqrt{a}}} - \sqrt[3]{a \cdot \sqrt[4]{a^3 \cdot \sqrt{a^{-5}}}} - 2 \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt{a \cdot \sqrt[4]{a^{-11}}}}$$

13) Izračunati vrijednost izraza:

$$\left(\sqrt{10 - 5\sqrt{3}} - \sqrt{10 + 5\sqrt{3}}\right)^2$$

14) Izračunati vrijednost izraza:

$$\left(\frac{15}{1 + \sqrt{6}} + \frac{4}{\sqrt{6} - 2} - \frac{12}{3 - \sqrt{6}}\right) \cdot \left(\sqrt{6} + 11\right)$$

15) Izračunati:

$$\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}$$

III grupa zadataka (viši nivo)

16) Izračunati:

$$\left[4^{-\frac{1}{4}} + \left(\frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right] \cdot \left[4^{-0,25} - \left(2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right]$$

17) Izračunaj:

$$[2(a^x + a^{-x})^{-1}]^{-2} - [2(a^x - a^{-x})^{-1}]^{-2}$$

18) Izračunaj:

$$\left[(1 - x^2)\sqrt{2} + 2^{\frac{3}{2}}x^2\right] \cdot \frac{x^{-2}}{1 + x^{-2}}$$

19) Izračunaj:

$$\left[a^{-\frac{3}{2}} \cdot b \cdot (ab^{-2})^{-\frac{1}{2}}(a^{-3})^{\frac{2}{3}}\right]^3,$$

ako je $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

20) Ako je $a = \left(2 - \sqrt{3}\right)^{-1}$ i $b = \left(2 + \sqrt{3}\right)^{-1}$ izračunati vrijednost izraza:

$$(a + 1)^{-1} + (b + 1)^{-1}$$

5.1.1 Rješenja zadataka i upute

1) d) $-\sqrt{2}$
2) b)1
3) d) $\frac{6}{5}$
4) d) 4
5) a) $\frac{5}{9}$
6) $\frac{24}{71}$
7) $\frac{b^6}{a^4}$
8) $\frac{1}{b^8}$
9) $\left(\frac{\text{ab}}{\text{a+b}}\right)^2$
10) 1
11) $9\sqrt[6]{\frac{x}{y}}$
12) 0
13) 10

14) -115

15) 4

16) $\frac{7}{16}$

17) 1

18) $\sqrt{2}$

19) 16

20) 1

5.2 Algebarski izrazi

I grupa zadataka (niži nivo– zadaci višestrukog izbora)

1) Ako je $P(x+1) = x^3 - 3x + 1$, tada je:

   a) $P(-2) = -15$ b) $P(-2) = -17$ c) $P(-2) = -18$ d) $P(-2) = -16$

2) Skraćivanjem razlomaka $\frac{15ab-25b^2}{9a^2-30ab+25b^2}$, $a \neq \frac{5}{3}b$, dobićemo:

   a) $\frac{5b}{3a+5b}$ b) $\frac{5}{3a+5b}$ c) $\frac{5b}{3a-5b}$ d) $\frac{5}{3a-5b}$

3) Skraćivanjem razlomka $\frac{x^2-ax+bx-ab}{x^3+bx^2+ax+ab}$ dobićemo:

   a) $\frac{1}{2x}$ b) $\frac{x-a}{x^2+a}$ c) $\frac{1}{x+a}$ d) $\frac{a}{x^2-a}$

4) Dati su polinomi $P(x) = -5x^2 + 2x + 4$ i $Q(x) = 2x^2 + 3x + 6$. Proizvod $P(x)Q(x)$ iznosi:

   a) $10x^2 + 6x + 24$ b) $-10x^2 + 6x + 24$

   c) $-10x^4 + 15x^3 + 14x^2 + 24x + 24$ d) $-10x^4 - 11x^3 - 16x^2 + 24x + 24$

5) Ostatak pri dijeljenju polinoma $P(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^2 - 6x + 12$ sa $Q(x) = x + 1$ iznosi:

   a) 14 b) 0 c) -5 d) 5

II grupa zadataka (srednji nivo)

6) Odrediti vrijednosti realnih parametara a tako da polinom $P(x) = 2x^4 + 15x^3 + 7x^2 + cx + 70$ bude djeljiv binomom $Q(x) = 2x + 5$.

7) Odrediti a i b tako da polinom $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + ax + b$ bude djeljiv sa $x^2 + x + 1$.

8) Uprostiti izraz:

$$\frac{2a+3}{2-a} - \frac{2-3a}{2+a} + \frac{16a-a^2}{a^2-4}.$$

9) Uprostiti izraz:

$$\left(\frac{a-2}{a+2}-\frac{a+2}{a-2}\right):\frac{8a^3-16a}{a^2+4a+4}.$$

10) Uprostiti izraz:

$$\left(1+\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}\right)\cdot\left(1-\frac{a}{x}\right)$$

11) Uprostiti izraz:

$$\left[\frac{(x+y)^2-4y^2}{x^2-y^2}-\frac{x-y}{x+y}\right]:\frac{2y}{x+y}, y\neq 0, x\neq \pm y.$$

12) Uprostiti izraz:

$$\left(\frac{a-2}{a+2}-\frac{a+2}{a-2}\right):\frac{8a^3-16a}{a^2+4a+4}.$$

13) Uprostiti izraz:

$$\left(\frac{x^3}{y^3}+1\right):\left(\frac{x^2}{y^2}-\frac{x}{y}+1\right)$$

14) Uprostiti izraz:

$$\frac{3a-\frac{4x^2}{3a}}{1-\frac{4x^2}{9a^2}}$$

15) Uprostiti izraz:

$$\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2}{x+\frac{x-xy}{y}}$$

III grupa zadataka (viši nivo)

16) Dat je polinom $P(x)=x^4+x^3+ax^2+bx+c$. Odrediti realne parametre a,b,c tako da pri dijeljenju datog polinoma sa: $x-1, x-2, x-3$ ostaci dijeljenja budu redom 1, 2 i 3.

17) Neka polinom P(x) pri djeljenju sa $(x+1)$ daje ostatak 3, a pri djeljenju sa $(x-1)$ ostatak – 3. Koliki ostatak daje taj polinom pri djeljenju sa (x^2+1)?

18) Skratiti razlomak:

$$\frac{a^{n+2}-4a^{n}}{4a^{n+1}-4a^{n+2}+a^{n+3}}$$

19) Izvršiti naznačene operacije:

$$\left[\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)^n\cdot\left(\frac{4}{x+y}\right)^{n-1}\right]:\left(\frac{x-y}{4}\right)^n$$

20) Izvršiti naznačene operacije:

$$\left(\frac{a^3+b^3}{a-b}\right)^{2x}:\left(\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}\right)^{2x}$$

5.2.1 Rješenja zadataka i upute

1) b) $\mathrm{P}(-2)=-17$
2) c) $\frac{5b}{3a-5b}$
3) b) $\frac{x-a}{x^2+a}$
4) d) $-10x^4-11x^3-16x^2+24x+24$
5) b) 0
6) 68
7) $a=-14, b=-11.$
8) $\frac{1}{a+2}$
9) $\frac{a+2}{2-a^2}$
10) -1
11) 2
12) $\frac{-1}{(a-2)^2}$
13) $\frac{x+y}{y}$
14) $3a$
15) $\left(\frac{x+y}{x}\right)^2$
16) $a=95, b=-54, c=-42$
17) $R(x)=-3x$

18) $\frac{a+2}{a(a-2)}$

19) $2^{3n-2}(x+y)$

20) $(a+b)^{4x}$

5.3 Geometrija

I grupa zadataka (niži nivo– zadaci višestrukog izbora)

1) Unutrašnji uglovi trougla su dati redom φ, 2φ, 3φ. Ti uglovi redom iznose:

   a) $30^\circ, 60^\circ$ i 90° b) $20^\circ, 40^\circ$ i 60° c) $45^\circ, 90^\circ$ i 135° d) $10^\circ, 20^\circ$ i 30°

2) Ako je razlika dva naporedna ugla 52°, ti uglovi su:

   a) 64° i 116° b) 100° i 48° c) 71° i 19° d) 34° i 86°

3) Zbir unutrašnjih uglova mnogougla koji ima 9 stranica iznosi:

   a) 1080° b) 1260° c) 1620° d) 1440°

4) Srednja linija trapeza iznosi $7cm$, jedna osnovica je $a = 8cm$, onda je druga osnovica:

   a) $c = \frac{15}{2}$ cm b) c = 9 cm c) c = 6 cm d) c = 15 cm

5) Površina kvadrata je $12cm^2$. Površina kruga koji je upisan u taj kvadrat iznosi:

   a) $6\pi cm^2$ b) $9\pi cm^2$ c) $36\pi cm^2$ d) $12\pi cm^2$

II grupa zadataka (srednji nivo)

6) Razlika ugla α i njemu naporednog ugla β je 36°. Izračunati ugao γ koji je komplementan sa β?

7) Odrediti unutrašnji ugao u mnogouglu ako je broj dijagonala tri puta veći od broja stranica.

8) Unutrašnji ugao pri vrhu jednakokrakog trougla je za 84° manji od susjednog spoljašnjeg ugla. a) Izračunati unutrašnje uglove. b)Pod kojim se uglom sijeku simetrale uglova na osnovici?

9) Kvadrat i pravougaonik imaju jednake površine. Izračunati obim kvadrata, ako je obim pravougaonika 50 cm, a duža stranica pravougaonika 4 puta veća od kraće stranice pravougaonika.

10) Ako jednu stranicu kvadrata produžimo za 2 cm, a drugu za 5 cm, dobijamo pravougaonik čija je površina za 45 cm^2 veća od površine kvadrata. Kolika je površina kvadrata?

11) Stranice jednakokrakog trapeza su a=16 cm,b=10 cm,c=4 cm . Izračunati površinu trapeza.

12) Ako su dužine osnovica trapeza 11 i 15, a krakovi 7 i 5, izračunati visinu trapeza h.

13) U krugu obima 10π upisan je pravougaonik čije se stranice odnose kao 3:4. Odrediti površinu pravougaonika.

14) Date su stranice trougla a = 21 cm, b = 17 cm, c = 10 cm. Izračunati površinu trougla P i visinu h_a.

15) Obim jednakokrakog trougla je 32 cm, a visina koja odgovara osnovici 8 cm. Izračunati površinu tog trougla.

III grupa zadataka (viši nivo)

16) U ΔABC simetrala CD ugla γ siječe stranicu AB pod uglom od 110°. Izračunati unutrašnje uglove trougla ako je $CD = BC$

17) Na hipotenuzi AB pravouglog ΔABC date su tačke M i N takve da je $AM = AC$ i $BN = BC$ i raspored tačaka je $A - N - M - B$. Izračunati $\angle MCN$.

18) Visina romba je h = 12 cm i manja dijagonala d = 15 cm. Izračunati obim romba.

19) Dijagonale paralelograma su 112 cm i 78 cm, a manja stranica je 25 cm. Kolika je površina paralelograma?

20) Ako su osnovice trapeza 12 i 3 cm, a dijagonale uzajamno normalne, izračunati površinu trapeza.

5.3.1 Rješenja zadataka i upute

1) a) $30°, 60°, 90°$
2) a) $64°$ i $116°$
3) b) $1260°$
4) c) c = 6 cm
5) b) $9\pi cm^2$
6) $\gamma = 18°$
7) $\alpha = 140°$
8) a) $44°, 68°$ i $68°$ b) $112°$
9) $O = 40cm$
10) $P = 25cm^2$
11) $P = 80\ cm^2$
12) $h = 2\sqrt{6}$
13) $h = 2\sqrt{6}$
14) $P = 84cm^2, h_a = 8cm$
15) $P = 48\ cm^2$
16) $\alpha = 30°, \beta = 70°, \gamma = 80°$
17) $\angle MCN = 45°$
18) $O = 50cm$
19) $P = 1680cm^2$
20) $P = 45cm^2$

5.4 Pravougli koordinatni sistem u ravni

I grupa zadataka (niži nivo– zadaci višestrukog izbora)

1) Grafik funkcije $y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$ siječe koordinatu osu Ox. koordinate tačke M su:

   a) $M\left(-\frac{2}{3},0\right)$ b) $M\left(\frac{2}{3},0\right)$ c) $M\left(0,-\frac{2}{3}\right)$ d) $M\left(0,\frac{2}{3}\right)$

2) Vrijednost parametra a za koju su grafici funkcija

   $y=-x+a-2$ i $y=(a-2)x-(3a-1)$ paralelni je:

   a) a = 1 b) a = 3 c) a = - 1 d) a = - 3

3) Vrijednosti parametra a za koju je funkcija $y=(a-1)x+a-\frac{1}{2}$ opadajuća je:

   a) $a\in(-\infty,1)$ b) $a\in(-\infty,\frac{1}{2})$ c) $a\in(1,+\infty)$ d) $a\in(\frac{1}{2},+\infty)$

4) Odsječak *n* na osi *Oy* prave $x+2y-2=0$ iznosi:

   a) 2 b) -2 c) 1 d) – 1

5) Dužina duži čije su krajnje tačke $A(1,4)$ i $B(1,2)$ je:

   a) 1 b) 4 c) 3 d) 2

II grupa zadataka (srednji nivo)

6) Date su tjemena trougla $A(-1,0), B(2,-3), C(-4,5)$. Izračunati:

   a) Površinu trougla ABC. b) Dužinu težišnice ta.

7) Tačke $A\ (-4,-2), B\ (2,4)\ i\ C\ (-3,y)$ su vrhovi trougla. Odrediti koordinatu y tako da površina trougla bude 21.

8) Spojiti sredine stranica trougla $A\ (5,6), B\ (3,4)\ i\ C(1,8)$ i pokazati da je površina novog trougla jednaka ¼$P\Delta ABC$.
9) Ispitati da li je trougao ABC čija su tjemena $A\ (-2,1), B\ (2,5)\ i\ C\ (-4,1)$ jednakostranični.
10) Dokazati da je trougao cija su tjemena: $A(2,2)$, $B(6,4)$, $C(5,6)$ pravougli.
11) Ispitati da li su tačke $A(-3,0), B(1,2)\ i\ C(5,4)$ kolinearne.
12) Izračunati O i P pravougaonika čiji su vrhovi: $A(-1,-1), B(5,-1), C(5,2)\ i\ D(-1,2)$.
13) Dat je skup funkcija $y = (4m-3)x - 2m + 7$, gdje je m realan parametar. Odrediti vrijednost parametra m takvo da grafik te funkcije prolazi tačkom $M(-2,5)$.
14) U funkciji $y = (a-2)x - 2a + 3$, (a – realan broj), odredi vrijednost parametra a, tako da ova funkcija na Y osi gradi odsječak dužine 5.
15) U funkcijama $y = (a-3)x + (a-2)$ i $y = (2a+1)x - (3a-1)$, (a – realan broj), odredi vrijednost parametra a, tako da grafici ovih funkcija budu paralelni.

III grupa zadataka (viši nivo)

16) Vrhovi trougla su $A(5,-1), B(x,3)\ i\ C(1,1)$. Odrediti koordinatu x tjemena B pod uslovom da dati trougao bude pravougli sa pravim uglom u vrhu C.
17) Dva vrha trougla su $A\ (8,-6)\ i\ B(6,9)$ a težište je $T\ (4,2)$. Naći dužinu stranice BC.
18) Za koje vrijednosti parametra a je funkcija $(4-a)\ y = (a-2)x + a - \frac{1}{2}$ opadajuća?
19) Izračunati poluprečnik i koordinate središta kružnice koja prolazi tačkom M(2, - 1) i dodiruje obje koordinatne ose.
20) Odrediti koordinate tačke $M(x,y)$ koja je jednako udaljena od tačaka $A(-1,-3), B(-4,6)$ i $C(3,-1)$ i naći to rastojanje.

5.4.1 Rješenja zadataka i upute

1) a) $M\left(-\frac{2}{3},0\right)$

2) a) $a=1$

3) a) $a\in(-\infty,1)$

4) c) 1

5) d) 2

6) a) 2; b) 1

7) $y=6$

8) $P\Delta ABC=6;\ P\Delta xyz=\frac{3}{2}$

9) $d_{AB}\neq d_{BC}\neq d_{AC}$ - trougao nije jednakostranični

10) $52=\sqrt{20}^2+\sqrt{5}^2$, $\mathrm{AB}=\sqrt{20}$, $\mathrm{AC}=5$, $\mathrm{BC}=\sqrt{5}$

11) $P=0$, tačke su kolinearne

12) $a=6,\ b=3,\ O=18cm,\ P=18cm^2$

13) $m=\dfrac{4}{5}$

14) $a=-1$

15) $a=-4$

16) $x=2$

17) Rj. C' $\left(7,\frac{3}{2}\right)$ središte duži AB, CT: C'T = 2:1, pa je C (-2,9) i BC = 8

18) $a\in(-\infty,2)\cup(4,+\infty)$

19) Ako je S(x, y) središte tražene kružnice, tada je $x=-y\ \ i\ \ \overline{AS}=|x|=x$. Dakle $\overline{AS}=x\ \Leftrightarrow\ \sqrt{(x-2)^2+(-x+1)^2}=x\ \Rightarrow\ x_1=1, x_2=5$. Postoje dva rješenja

$r=1, S(1,-1);\ r'=5, S'(5,-5)$

20) Prema uslovu zadatka vrijedi $\overline{\mathrm{MA}}=\overline{\mathrm{MB}}$ i $\overline{\mathrm{MA}}=\overline{\mathrm{MC}}$. Rješavanjem sistema jednačina dobijamo M(-1, 2) i $\overline{\mathrm{MA}}=\overline{\mathrm{MB}}=\overline{\mathrm{MC}}=5$.

5.5 Linearne jednačine i nejednačine. Sistemi linearnih jednačina

I grupa zadataka (niži nivo– zadaci višestrukog izbora)

1) Rješenje jednačine $4x + 2 - 3x - 4 = 8x + 4 - 2x - 16$ je:

   a) $x = 5$ b) $x = 2$ c) $x = 6$ d) $x = 3$

2) Rješenje nejednačine $2\mathrm{x} - 3 > 3x + 1$ je:

   a) $x \in (-\infty, -4)$ b) $x \in (-\infty, -2)$ c) $x \in (-4, +\infty)$ d) $x \in (-2, +\infty)$

3) Rješenje nejednačine $-2\mathrm{x} - 1 \geq 5$ je:

   a)$x \in (-\infty, -2)$ b) $x \in (-\infty, -2]$ c) $x \in (-2, +\infty)$ d) $x \in [-2, +\infty)$

4) Rješenje sistema jednačina $x + y = 5 \wedge x - y = 1$ je:

   a) $x = -2, y = -3$ b) $x = -2, y = -3$ c) $x = 3, y = 2$ d) $x = 2, y = 3$

5) Rješenje sistema nejednačina $x > 3 \wedge 2x \leq -12$ je:

   a) $x \in (3 - ,6]$ b) $x \in (-\infty, -6)$ c) $x \in (3, -6)$ d) nema rješenja

II grupa zadataka (srednji nivo)

6) Riješiti jednačinu:

$$\frac{9x+7}{4} - \left(1 - \frac{2-x}{9}\right) = 7x$$

7) Riješiti jednačinu:

$$\frac{14}{3x-12} - \frac{3}{8-2x} = \frac{2+x}{x-4} - \frac{5}{6}$$

8) Riješiti jednačinu:

$$\frac{10x-18}{2x^2-27} - \frac{1}{2x+3} = \frac{1}{18x-27}$$

9) Riješiti jednačinu:

$$\frac{x+3}{4} - \frac{|x+4|}{9} = \frac{1}{2} - \frac{x+5}{36}$$

10) Odrediti sva rješenja jednačine:

$$|x+4|-|x-3|=x$$

11) Riješiti nejednačinu:

$$(2x-3)(3x+5)\geq 0$$

12) U skupu realnih brojeva riješiti nejednačinu:

$$\frac{2\mathrm{x}-5}{\mathrm{x}-1}\leq 3$$

13) U skupu realnih brojeva riješiti nejednačinu:

$$\frac{\mathrm{x}-1}{(2-\mathrm{x})(\mathrm{x}-3)}\geq 0$$

14) Riješiti sistem jednačina:

$$(x+3)(y+5)=(x+1)(y+8)\quad\wedge\quad(2x-3)(5y+7)=2(5x-6)(y+1)$$

15) Riješiti sistem jednačina:

$$\frac{x+y}{3}+x=-3\quad\wedge\quad y-\frac{y-x}{5}=-1{,}2$$

III grupa zadataka (viši nivo)

16) . Riješiti nejednačinu:

$$\frac{x}{x+3}-\frac{x-3}{x}\geq\frac{9-x}{x^2+3x}.$$

17) Gausovom metodom riješiti sistem jednačina:

$$4x-3y-z=8\quad\wedge\quad 3x-5y+2z=-5\quad\wedge\quad 6x+2y-3z=23.$$

18) Zbir tri broja je 182. Drugi broj je za 6 veći od prvog, a treći je za 14 veći od drugog. Koji su to brojevi?

19) Avion poleti iz mjesta A prema mjestu B u 8 sati brzinom 500 km/h; u 10 sati krene za njim drugi avion brzinom od 750 km/h. Za koliko će sati drugi avion dostići prvi?

20) Uveća li se brojnik i nazivnik nekog razlomka za 3 dobiju se $\frac{2}{3}$, umanji li se brojnik i nazivnik za 2 dobije se $\frac{1}{2}$. Koji je to razlomak?

5.5.1 Rješenja zadataka i upute

1) b) $x = 2$
2) a) $x \in (-\infty, -4)$
3) b) $x \in (-\infty, -2]$
4) c) $x = 3, y = 2$
5) a) $x \in (3 - ,6]$
6) $\frac{1}{5}$
7) $x = 5$
8) $x = 3$
9) $x = \frac{1}{3}$
10) $x = -7 \vee x = -1$
11) $x \in \left(-\infty, \frac{5}{3}\right] \cup \left[\frac{3}{2}. +\infty\right)$
12) $x \in (-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$
13) $x \in (-\infty, 1] \cup (2, 3)$
14) $(x, y) = (3,1)$
15) $(x, y\ ) = (-2, -1)$
16) $x \in [-3, +\infty)$
17) $x = 2, y = 1, z = -3$
18) 52, 58, 72
19) Neka je x broj sati za koje će drugi avion dostići prvi. U trenutku kad ga dostigne, ova dva aviona su prešla jednak put. Put koji je prešao prvi je $(x + 2) \cdot 500$, put koji je prešao drugi je $x \cdot 750$. Dakle treba da vrijedi jednačina: $(x + 2) \cdot 500 = x \cdot 750 \Leftrightarrow 500x + 1000 = 750x \Leftrightarrow 1000 = 250x \Leftrightarrow x = 4$. Dakle drugi avion će dostići prvi za 4 sata.

20) Na osnovu uslova zadatka imamo sistem jednačina: $\frac{x+3}{y+3} = \frac{2}{3} \wedge \frac{x-2}{y-2} = \frac{1}{2}$. Rješenja ovog sistema su: $x = 7 \; i \; y = 12$. Traženi razlomak je $\frac{7}{12}$.

5.6 Kvadratne funkcije, jednačine i nejednačine. Jednačine višeg reda.

I grupa zadataka (niži nivo– zadaci višestrukog izbora)

1) Ako je $f(x) = 2x^2 + x - 3$ tada je $f(\sqrt{2})$:

   a) $\sqrt{2}$ b) $5 + \sqrt{2}$ c) $\sqrt{2} - 3$ d) $1 + \sqrt{2}$

2) Tačke u kojima kvadratna funkcija $y = x^2 - 11x + 10$ siječe osu apscise su:

   a) 1 i 10 b) 11 i 10 c) -1 i 11 d) -1 i -10

3) Ekstremna vrijednost funkcije $y = x^2 + 8x + 7$ je:

   a) -4 b) 4 c) -9 d) 9

4) Kanonski oblik funkcije $y = x^2 - 4x - 5$ je:

   a) $y = (x-2)^2 + 1$ b) $y = (x-2)^2 - 1$

   c) $y = (x-2)^2 - 5$ d) $y = (x-2)^2 - 9$

5) Kvadratna jednačina čija su rješenja $x_1 = 5 + \sqrt{2}$ i $x_2 = 5 - \sqrt{2}$ ima oblik:

   a) $x^2 - 10x + 23 = 0$ b) $x^2 - 10x + 21 = 0$

   c) $x^2 - 5x + 2 = 0$ d) $x^2 - 5x - 10 = 0$

II grupa zadataka (srednji nivo)

6) U funkciji $y = (m-2)x^2 - (m+3)x + m - 1$ odrediti parametar m tako da funkcija ima ekstremnu vrijednost za $x_0 = \frac{4}{3}$.

7) Odrediti vrijednosti parametra a tako da kvadratna funkcija $x^2 - mx + 9 = 0$ bude uvijek pozitivna.

8) U jednačini $x^2 – (m+3)x + m + 2 = 0$ odrediti vrijednost realnog parametra m tako da njena rješenja zadovoljavaju uslov $x_1^2 + x_2^2 = 26$.

9) Riješiti jednačinu:

$$\frac{2x+1}{x+3} - \frac{x-1}{x^2-9} = \frac{x+3}{3-x} - \frac{4+x}{3+x}$$

10) Riješiti nejednačinu:

$$(x^2-3x+2)\cdot(x^2-7x+12) < 0.$$

11) Riješi nejednačinu:

$$\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-3} \geq \frac{1}{x^2-5x+6}$$

12) Za koju vrijednost parametra $m \in R$ jednačina $mx^2 - 2(m-1)x + (m-1) = 0$ ima konjugovano – kompleksna rješenja?

13) Data je jednačina $(x-m)^2 = 3 - mx$. Odrediti *m* tako da jednačina ima realna rješenja.

14) Odrediti rješenja bikvadratne jednačine:

$$2x^4 + 5x^2 + 2 = 0$$

15) Riješiti jednačinu:

$$15x^3 + 19x^2 - 19x - 15 = 0$$

III grupa zadataka (viši nivo)

16) Odrediti m tako da je za svako *x* ispunjena nejednakost:

$$\left|\frac{\mathrm{x}^2 - \mathrm{mx} + 1}{\mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 1}\right| < 3$$

17) Odrediti realni parametar *m* za koji kvadratne jednačine:

$x^2 + mx + 6 = 0$ i $2x^2 + mx + 2 = 0$ imaju jedan zajednički korijen.

18) U jednačini $x^2 - (m+1)x + m + 4 = 0$ odrediti parametar m tako da oba rješenja budu negativna.

19) Za koje vrijednosti parametra m su oba rješenja jednačine $4x^2 - 4(m-2)x + m = 0$ pozitivna?

20) Razlika recipročnih vrijednosti dva uzastopna cijela broja iznosi $\frac{1}{72}$. Odrediti te brojeve.

5.6.1 Rješenja zadataka i upute

1) b) $5+\sqrt{2}$
2) a) 1 i 10
3) c) -9
4) d) $y=(x-2)^2-9$
5) a) $x^2-10x+23=0$
6) $m=5$
7) $x\in(-6,6)$
8) $m_1=-7, m_2=3$
9) $x_1=-\frac{5}{4}, m_2=1$
10) $x\in(1,2)\cup(3,4)$
11) $x\in(2,3)\cup[6,+\infty)$
12) $m\in(1,+\infty)$
13) $m\in(-2,2)$
14) $x_{1/2}=\pm\sqrt{2}, x_{2/3}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
15) $x_1=1, x_2=-\frac{3}{5}, x_3=-\frac{5}{3}$
16) $m\in(-5,1)$
17) Neka je x_0 zajednički korijen jednačina, pa imamo $x_0^2+mx_0+6=0$ i

    $2x_0^2+mx_0+2=0$. Oduzimanjem ovih jednačina imamo $x_0^2=4 \implies x_0=\pm 2$. Odavde je $m=-5$ i $m=5$.
18) $D\geq 0, x_1+x_2<0, x_1\cdot x_2>0$;

    sistem $\mathrm{m}^2-2\mathrm{m}-15\geq 0, \mathrm{m}+1<0, \mathrm{m}+4>0$. Rješenje ovog sistema je $m\in[-3,1]$.
19) $m\in[4,+\infty)$ $(D\geq 0, x_1+x_2>0, x_1\cdot x_2>0)$
20) 8 i 9 ili -8 i -9.

5.7 Eksponencijalne funkcije, jednačine, nejednačine

I grupa zadataka (niži nivo– zadaci višestrukog izbora)

1) U jednačini $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = 1$ nepoznata x je:

   a) $x = 0{,}50$ b) $x = 0{,}25$ c) $x = 0$ d) $x = -1$

2) U jednačini $0{,}01 = 100 \cdot 10^{\mathrm{x}}$ nepoznata x je:

   a) $x = 6$ b) $x = -3$ c) $x = -4$ d) $x = -2$

3) U jednačini $0.25 = 32^{x+1}$ nepoznata x je:

   a) $x = 6$ b) $x = -3$ c) $x = -4$ d) $x = \frac{-7}{5}$

4) Rješenje eksponencijalne nejednačine $2^{3x} < 2^{x+5}$ je

   a) $x \in \left(-\frac{5}{2}, +\infty\right)$ b) $x \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$ c) $x \in \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ d) $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right)$

5) Rješenje eksponencijalne nejednačine $0{,}04^{1-x} \leq 25$ je

   a) $x \in (-\infty, 2]$ b) $x \in (-\infty, 2)$ c) $x \in (-\infty, 4]$ d) $x \in (2, +\infty)$

II grupa zadataka (srednji nivo)

6) U skupu realnih brojeva riješiti jednačinu:

$$5^{x^2-5x+6} = 1.$$

7) U skupu realnih brojeva riješiti jednačinu:

$$100 \cdot 10^{2x-3} = 1000^{\frac{x+1}{9}}.$$

8) U skupu realnih brojeva riješiti jednačinu:

$$5^{2x+1} - 3 \cdot 5^{2x-1} = 550.$$

9) U skupu realnih brojeva riješiti jednačinu:

$$10 \cdot 2^{x} - 4^{x} = 16.$$

10) U skupu realnih brojeva riješiti jednačinu:

$$3^x - 9 \cdot 3^{-x} = 8$$

11) Riješiti nejednačinu:

$$\left(\frac{25}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{125}\right)^{x-1} > \frac{2}{5}$$

12) Riješiti nejednačinu:

$$125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2} > \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}$$

13) Riješiti nejednačinu:

$$(0,5)^{x^2} < \frac{1}{(0,5)^{x-2}}$$

14) Riješi nejednačinu:

$$5^x + 5^{x-1} \geq 6^x$$

15) Riješiti nejednačinu:

$$2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} \leq 9.$$

III grupa zadataka (viši nivo)

16) Riješiti jednačinu:

$$2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1} = 0.$$

17) Riješiti jednačinu:

$$\sqrt{32^{4x-6}} = 0,25 \cdot 128^{2x-3}.$$

18) Riješiti jednačinu:

$$\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x + \left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x = 10.$$

19) Riješiti nejednačinu:

$$\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2-2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \geq 1$$

20) Odrediti $a \in R$ tako da grafici funkcija $f(x) = 2^{x+1} + a,\ g(x) = a \cdot 2^{-x} + 2$, imaju samo jednu zajedničku tačku, pa odrediti tu tačku za dobijeni broj a.

5.7.1 Rješenja zadataka i upute

1) c) $x = 0$
2) c) $x = -4$
3) d) $x = \frac{-7}{5}$
4) b) $x \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$
5) a) $x \in (-\infty, 2]$
6) $x_1 = 3 \lor x_2 = 2$
7) $x = \frac{4}{5}$
8) $x = \frac{3}{2}$
9) $x = 1 \lor x = 3$
10) $x = 2$
11) $x \in (-\infty, 4)$
12) $x \in (-\infty, 4)$
13) $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$
14) $x \in (-\infty, 1]$
15) $x \in (-\infty, 2]$
16) Jednačinu možemo napisati u obliku $2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3 \cdot 3^{2x} = 0$. Dijeljenjem sa 3^{2x} dobijamo $2\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5\left(\frac{2}{3}\right)^{x} + 3 = 0$. Smjena: $\left(\frac{2}{3}\right)^{\mathrm{x}} = \mathrm{t}, \mathrm{t} > 0$, dobijamo kvadratnu jednačinu $2t^2 - 5t + 3 = 0$, odakle je $t_1 = 1, t_2 = \frac{3}{2}$, pa je nakon uvrštavanja u jednačinu $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1, \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2}. x_1 = 0, x_2 = -1$.
17) Kvadriranjem zadate jednačine, dobijamo jednačinu oblika $32^{4x-6} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 128^{2(2x-3)} \Leftrightarrow 2^{5(4x-6)} = 2^{-4} \cdot 2^{14(2x-3)}$ odakle je $x = 2$.

18) $\sqrt{5+\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{5+\sqrt{24}}\cdot\sqrt{5-\sqrt{24}}}{\sqrt{5-\sqrt{24}}} = \frac{1}{\sqrt{5-\sqrt{24}}}$, pa datu jednačinu možemo pisati u obliku

$\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x + \frac{1}{\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x} = 10$. Smjenom $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x = t$, dobijamo jednačinu

$t^2 - 10t + 1 = 0$, odakle je $t_{1,2} = 5 \pm \sqrt{24}$, pa je $x_1 = 2, x_2 = -2$.

19) $x \in (0, 2]$

20) Grafici funkcija $f(x)$ i *g(x)* imat će samo jednu zajedničku tačku ako jednačina $2^{x+1} + a = a \cdot 2^{-x} + 2$ (i) ima tačno jedno rješenje. Jednačina (i) se može transformisati u oblik $2 \cdot (2^x)^2 + (a-2) \cdot 2^x - a = 0$ (ii). Kvadratna jednačina (po 2^x) ima jedno rješenje ako je $D = (a-2)^2 + 8a = (a+2)^2 = 0$, odakle je $a = -2$. Grafici funkcija $f(x)$ i $g(x)$ imaju samo jednu zajedničku tačku ako je $a = -2$. Za $a = -2$ iz jednačine (ii) imamo da je $2^x = 1 \Rightarrow x = 0$.

5.8 Logaritamske funkcije, jednačine i nejednačine

Igrupa zadataka (niži nivo– zadaci višestrukog izbora)

1) Vrijednost izraza $log_{30}2 + log_{30}3 + log_{30}5$ je:

   a) 1 b) 2 c) 3 d) 5

2) Vrijednost logaritma $log_5 \frac{1}{125}$ iznosi:

   a) 3 b) 5 c) – 3 d) – 5

3) Vrijednost logaritma $log_{\sqrt{3}}27$ iznosi:

   a) 9 b) – 6 c) – 3 d) 6

4) Vrijednost logaritma $log_8 log_4 log_2 16$ iznosi:

   a) 0 b) 4 c) 2 d) 16

5) Oblast definisanosti logaritamske funkcije $y = log_2(4x - 1)$ je:

   a) $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ b) $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ c) $x \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ d) $x \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$

II grupa zadataka (srednji nivo)

6) Izračunaj:

$$5^{3-log_5 25} + 3^{2-log_3 3} - 2^{4-log_2 5}$$

7) Odrediti definiciono područje funkcije:

$$y = ln\frac{x+1}{x}$$

8) Izračunati:

$$log_3 81 \cdot log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{27} + log_2 16 \cdot log_{\frac{1}{2}} 8$$

9) Odrediti definiciono područje, a zatim riješiti jednačinu:

$$log_4(x+3) - log_4(x-1) = 2 - log_4 8$$

10) Riješiti logaritamsku jednačinu:

$$\frac{2\log x}{\log x - 1} - \log x = \frac{2}{\log x - 1}$$

11) Riješiti logaritamsku jednačinu:

$$log_6(5 + 6^{-x}) = x + 1.$$

12) Riješiti logaritamsku jednačinu:

$$3log^2(x-1) - 10\,log(x-1) + 3 = 0$$

13) Riješiti jednačinu:

$$log(x-1) + 2log\sqrt{x+2} = 1$$

14) Odrediti definiciono područje, a zatim riješiti nejednačinu:

$$log_2 \frac{5x-1}{x+2} < 2$$

15) Odrediti definiciono područje, a zatim riješiti nejednačinu:

$$log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6) > -1$$

III grupa zadataka (viši nivo)

16) Riješiti jednačinu:

$$log_3 x \cdot log_9 x \cdot log_{27} x \cdot log_{81} x = \frac{2}{3}.$$

17) Riješiti jednačinu:

$$log_{\sqrt{5}}(4^x - 6) - log_{\sqrt{5}}(2^x - 2) = 2.$$

18) Riješiti jednačinu:

$$x^{1+log_3 x} = 3x.$$

19) U skupu realnih brojeva odrediti definiciono područje i riješiti jednačinu:

$$log_{0,5}\left(log_3(x-1)\right) = 1.$$

20) Riješiti jednačinu:

$$4^{2log_5 x} - 4 \cdot 4^{log_5 x} + \frac{1}{4} \cdot 4^{log_5 x} = 1.$$

5.8.1 Rješenja zadataka i upute

1) a) 1
2) c) – 3
3) d) 6
4) a) 0
5) c) $x \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$
6) $\frac{24}{5}$
7) $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$
8) 0
9) a) $x \in (0, +\infty)$, b) $x = 5$
10) $x_1 = 100, x_2 = 10$
11) $x = 0$
12) $x_1 = 1001, x_2 = 1 + \sqrt[3]{10}$
13) $x = 3$
14) a) $x \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{5}, +\infty\right)$, b) $x \in \left(\frac{1}{5}, 9\right)$
15) a) $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$, b) $x \in (1,2) \cup (3,4)$
16) Nakon svodjenja na istu bazu dobije se ekvivalentna jednačina $\frac{1}{24} log_3^4 x = \frac{2}{3}$.

    Smjena $log_3 x = t$ odakle je:

    $t^4 - 16 = 0 \Rightarrow (t^2 - 4)(t^2 + 2) = 0 \Rightarrow (t-2)(t+2)(t^2+4) = 0.$

    Odavde je $t = 2$ ili $t = -2$, pa je $x = 9$ ili $x = \frac{1}{9}$.
17) $x = 2$
18) $x = 3 \vee x = \frac{1}{3}$
19) a) $x \in (2, +\infty)$, b) $x = 1 + \sqrt{3}$
20) Smjena $log_5 x = t$ odakle dobijamo kvadratnu jednačinu: $4t^2 - 15t - 4 = 0$, čija su rješenja $t_1 = 4, t_2 = -\frac{1}{4}$. U prvom slučaju $4^{log_5 x} = 4 \Rightarrow log_5 x = 1 \Rightarrow x_1 = 5$. Drugi slučaj ne daje rješenje, jer je $t > 0$.

5.9 Osnovi trigonometrije

Igrupa zadataka (niži nivo– zadaci višestrukog izbora)

1) Vrijednost izraza $\frac{sin30°\cdot cos60°-tg45°}{sin\frac{\pi}{6}+cos\frac{\pi}{3}}$ jednaka je :

   a) 0 b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{4}$ d) -3

2) Vrijednost izraza $\sin 120° - \cos 330°$ jednaka je :

   a) 0 b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 1

3) Ako je $cos\,x = \frac{4}{5}$ i $sinx = \frac{3}{5}$ tada je $tg\,x$ jednak:

   a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{5}{3}$ d) $\frac{5}{4}$

4) Ako je $sin\,x = \frac{1}{2}$ i $cosx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ tada vrijednos $cos2\,x$ iznosi:

   a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $-\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{4}$

5) U pravouglom trouglu je $sin\alpha = \frac{2}{5}$, a hipotenuza $c = 6$. Tada je kateta a, nasuprot ugla α:

   a) $a = \frac{12}{5}$ b) $a = \frac{6}{5}$ c) $a = \frac{5}{2}$ d) $a = \frac{1}{2}$

II grupa zadataka (srednji nivo)

6) Izračunati koliko je $sin\,2x$ ako je $cos\,x = \frac{4}{5}$ i $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

7) Izračunati koliko je $ctg\,x$, ako je $tg\frac{x}{2} = \frac{5}{3}$ i $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

8) Izračunati $\frac{2sin\alpha-3cos\alpha}{3cos\alpha-4sin\alpha}$ ako je $tg\alpha = \frac{2}{3}$.

9) Izračunati obim pravougog trougla ABC čija je kateta $b = 9cm\ i\ tg\alpha = \frac{4}{3}$.

10) Izračunati:

$$2\cdot sin750° - 3\cdot \cos 900° + \mathrm{tg}405°.$$

11) Ako je $sin\,\alpha = \frac{3}{5}$ i $sin\,\beta = \frac{8}{17}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, odredi $sin(\alpha + \beta)$.

12) Odredi $tg(45° + \alpha)$ ako je $cos\alpha = \frac{3}{5}$, $270° < \alpha < 360°$.

13) Dokazati trigonometrijski identitet:

$$\left(1 + tgx + \frac{1}{cos\,x}\right)\left(1 + tgx - \frac{1}{cos\,x}\right) = 2tgx.$$

14) Dokazati trigonometrijski identitet:

$$cos^2\alpha\,(tg\alpha + 2)(2tg\alpha + 1) - 5\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha = 2.$$

15) Dokazati trigonometrijski identitet:

$$\frac{cos\alpha}{1 - tg\alpha} - \frac{sin\alpha}{ctg\alpha - 1} = cos\alpha + sin\alpha.$$

III grupa zadataka (viši nivo)

16) Ako je $\alpha - \beta = 45°$, $tg\alpha = 2$ i $\alpha \in (0°, 90°)$ izračunati $tg\beta$.

17) Dokazati trigonometrijski identitet:

$$cos^3xsinx - sin^3xcosx = \frac{sin4x}{4}.$$

18) Dokazati trigonometrijski identitet:

$$\left(tg^3\alpha + \frac{1 - tg\,\alpha}{ctg\,\alpha}\right) : \left(\frac{1 - ctg\,\alpha}{tg\,\alpha} + ctg^3\alpha\right) = tg^4\alpha$$

19) Izračunati cosα i tgα ako je:

$$sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}},\ \left(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

20) Ako je $tg\alpha = 3^x, tg\beta = 3^{-x}\ i\ \alpha - \beta = \frac{\pi}{6}$ odrediti x.

5.9.1 Rješenja zadataka i upute

1) d) -3
2) a) 0
3) b) $\frac{3}{4}$
4) d) $\frac{1}{4}$
5) a) $a = \frac{12}{5}$
6) $sin\, 2x = -\frac{24}{25}$
7) $ctg\, x = -\frac{8}{15}$
8) – 5
9) O = 36 cm
10) 5
11) $-\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{85}}$
12) $-\frac{1}{7}$
13) $\left(1+\frac{sinx}{cosx}+\frac{1}{cosx}\right)\cdot\left(1+\frac{sinx}{cosx}-\frac{1}{cosx}\right) = \frac{cosx+sinx+1}{cosx}\cdot\frac{cosx+sinx-1}{cosx} =$

$$= \frac{(cosx+sinx)^2-1}{cos^2x} = \; = \frac{2sinxcosx}{cos^2x} = 2tgx$$

14) $\cos^2\alpha\cdot\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+2\right)\cdot\left(\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}+1\right) - 5\sin\alpha\cos\alpha =$

$$= \cos^2\alpha\cdot\left(\frac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{\cos\alpha}\right)\cdot\left(\frac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}\right) - 5\sin\alpha\cos\alpha =$$

$$= 2\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 5\sin\alpha\cos\alpha = 2.$$

15) $\frac{\cos\alpha}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} - \frac{\sin\alpha}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-1} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha} = \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha} = \cos\alpha+\sin\alpha$

16) $tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha-t\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}, \quad 1 = \frac{2-tg\beta}{1+2tg\beta} \Rightarrow 1+2tg\beta = 2-tg\beta \Rightarrow 3tg\beta = 1 \Rightarrow tg\beta = \frac{1}{3}$

17) Uputstvo: koristiti sinus dvostrukog ugla.

18) Koristimo osobinu $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

$$\left(\operatorname{tg}^3\alpha + \frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}\right):\left(\frac{1-\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}+\operatorname{ctg}^3\alpha\right) = \left(\operatorname{tg}^3\alpha + \frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}\right):\left(\frac{1-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{1}{\operatorname{tg}^3\alpha}\right) =$$

$$= (\mathrm{tg}^3\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}^2\alpha) : \left(\frac{\frac{\mathrm{tg}\,\alpha - 1}{\mathrm{tg}\,\alpha}}{\mathrm{tg}\,\alpha} + \frac{1}{\mathrm{tg}^3\alpha} \right) = (\mathrm{tg}^3\alpha - \mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha) : \left(\frac{\mathrm{tg}\,\alpha - 1}{\mathrm{tg}^2\alpha} + \frac{1}{\mathrm{tg}^3\alpha} \right) =$$

$$= \mathrm{tg}\,\alpha(\mathrm{tg}^2\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha + 1) : \frac{\mathrm{tg}^2\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha + 1}{\mathrm{tg}^3\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha(\mathrm{tg}^2\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha + 1) \cdot \frac{\mathrm{tg}^3\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha + 1} = \mathrm{tg}^4\alpha$$

19) $cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, tg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

20) $x = \frac{1}{2}$

5. B Primjer ispita za nivo B

1. Vrijednostizraza $\frac{1}{\sqrt{5}-2}-\frac{1}{\sqrt{5}+2}$ iznosi:

   a) -4 b) 0 c) 1 $\boxed{\text{d) } 4}$

2. Ostatak pri dijeljenju polinoma $P(x)=2x^5-3x^4+x^2-6x+12$ sa $Q(x)=x+1$ iznosi:

   a) 14 $\boxed{\text{b) } 0}$ c) -5 d) 5

3. Grafik funkcije $y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$ siječe koordinatu osu Ox. Koordinate tačke M su:

   $\boxed{\text{a)M}\left(-\frac{2}{3},0\right)}$ b) M $\left(\frac{2}{3},0\right)$ c) M $\left(0,-\frac{2}{3}\right)$ d)M $\left(0,\frac{2}{3}\right)$

4. U jednačini $0{,}01=100\cdot 10^{x}$ nepoznata x je:

   a) $x=6$ b) $x=-3$ $\boxed{\text{c) } x=-4}$ d) $x=-2$

5. Unutrašnji ugao pri vrhu jednakokrakog trougla je za 84° manji od susjednog spoljašnjeg ugla.

   a) Izračunati unutrašnje uglove.

   b) Pod kojim se uglom sijeku simetrale uglova na osnovici?

   Rješenje: $\boxed{\text{a) } 44^\circ, 68^\circ \text{ i } 68^\circ \quad \text{b) } 112^\circ}$

6. U skupu realnih brojeva riješiti nejednačinu: $\frac{x-1}{(2-x)(x-3)}\geq 0$

   Rješenje: $\boxed{x\in(-\infty,1]\cup(2,3)}$

7. U jednačini $x^2-(m+3)x+m+2=0$ odrediti vrijednost realnog parametra m tako da njena rješenja zadovoljavaju uslov $x_1^2+x_2^2=26$.

Rješenje: $\boxed{m_1 = -7, m_2 = 3}$

8. Odrediti definiciono područje, a zatim riješiti nejednačinu: $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 5x + 6\right) > -1$.

Rješenje: $\boxed{\text{a) } x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty) \quad \text{b) } x \in (1, 2) \cup (3, 4)}$

9. Odrediti kompleksan broj $z = x + iy$ koji zadovoljava sistem jednačina:

$$|z + 2i| = |z - 4i| \wedge |z - 4| = 1$$

Rješenje: $\boxed{z = 4 + i}$

10. Ako je $tg\alpha = 3^x, tg\beta = 3^{-x}$ i $\alpha - \beta = \frac{\pi}{6}$ odrediti x.

Rješenje: $\boxed{x = \frac{1}{2}}$

Napomena: Tačna rješenja zadataka su uokvirena

6. Zadaci za nivo C sa rješenjima i uputama

6.0 Skup. Skupovi brojeva i operacije

I grupa zadataka (niži nivo– zadaci višestrukog izbora)

1) Koliko je ukupno racionalnih brojeva u skupu: $\left\{-2, 0, \frac{2}{3}, 0.75, \sqrt{2}, \pi\right\}$?

   a) jedan, b) dva, c) tri, d) četiri.

2) Koji brojevi iz skupa $P=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ su prosti brojevi?

   a) 1,3,5,7,9 b) 2,3,5,7 c) 2,4,6,8 d) 1,2,3,5,7

3) Vrijednost izraza $(-2)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2+2^0$ je:

   a) 3 b) -6 c) -5 d.) -3

4) U skupu realnih brojeva vrijednost izraza $\sqrt{\frac{27}{7}}\cdot\sqrt{\frac{7}{3}}$ je:

   a) $\sqrt{3}$ b) 9 c) 3 d) $\sqrt{27}$

5) Vrijednost izraza $2\cdot|-2|-3\cdot|-4|$ je:

   a) -8 b) 8 c) 14 d) -14

II grupa zadataka (srednji nivo)

6) Izračunati vrijednost izraza:

$$4-\frac{1}{4}\cdot\left\{2-\frac{1}{4}\cdot[4+4:(-1+3)]\right\}$$

7) Izračunati vrijednost izraza:

$$\left(1-\frac{3}{4}\right):0,75+\left(0,5+\frac{3}{8}\right):\frac{3}{8}.$$

8) Izračunati vrijednost izraza:

$$-4 \cdot \left[-\frac{1}{3} \cdot \left(2{,}5 - \frac{7}{4}\right)\right].$$

9) Izračunati vrijednost izraza:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) : \left(0{,}5 - 2\,\frac{1}{4}\right).$$

10) Izračunati vrijednost izraza:

$$\left[\left(2 + \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{3} + 1\right] : \left[\left(3 - \frac{1}{2}\right) : \frac{3}{2} - 1\right]$$

11) Izračunati vrijednost izraza:

$$\left(\sqrt{100 - 36} - \sqrt{25}\right)^2 : \sqrt[3]{27} - \left(1\,\frac{1}{3}\right)^2$$

12) Izračunati vrijednost izraza:

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}}$$

13) Izračunati vrijednost izraza:

$$\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 - \left(\frac{1}{4} - 1\right)}{\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} - 2\right)}$$

14) Izračunati vrijednost izraza:

$$\left|\frac{3}{4} - 2\right| - \frac{11}{5} : 11 - 5^0$$

15) Izračunati vrijednost izraza:

$$1 - \frac{\left(2 + \frac{1}{3}\right) : \left(3 - \frac{4}{3}\right)}{\left(\frac{3}{2} - \frac{7}{3}\right) : \left(\frac{8}{5} - \frac{4}{7}\right)}$$

III grupa zadataka(viši nivo)

16) Izračunati vrijednost izraza:

$$\frac{-2{,}7 \cdot \left(1{,}5 + \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{7}{6} + 1{,}75\right) : \left(\frac{7}{12} - 2{,}25\right)}{0{,}125 + \frac{1}{6} - \frac{5}{3}}$$

17) Izračunati vrijednost izraza:

$$\left(\frac{a^2+b^2}{ab}+2\right):\left(\frac{a^2+b^2}{ab}-2\right)$$

za $a = 14\ i\ b = 6.$

18) Izračunati vrijednost izraza :

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right):(a+b)$$

za $a = -1\frac{3}{4}$ i $b = 0{,}8.$

19) Zadana su tri broja $a = 2^4 - 2^3$, $b = \sqrt[3]{64} : \frac{1}{3}$, $c = \left|-\frac{2}{3}\right| \cdot |2| + 1$. Koliko iznosi proizvod brojeva a i c uvećan za broj b?

20) Na brojnoj osi zadane su tačke $O(0)$, B $\left(-\frac{3}{4}\right)$, D $\left(\frac{9}{2}\right)$. Koordinata tačke C je aritmetička sredina koordinata tačaka B i D. Koordinata tačke E je za 3 manja od koordinate tačke C. Između koje dvije tačke se nalazi tačka A $\left(\frac{80}{21}\right)$?

6.0.1 Rješenja zadataka i upute

1) d) četiri
2) b) 2,3,5,7
3) a) 3
4) c) 3
5) a) -8
6) $\frac{31}{8}$
7) $2\frac{2}{3}$
8) 1
9) $-\frac{2}{3}$
10) $\frac{23}{8}$
11) $\frac{9}{11}$

12) $-\frac{2}{9}$

13) $\frac{3}{7}$

14) $\frac{1}{20}$

15) $\frac{341}{125}$

16) 2

17) $\frac{25}{4}$

18) $-\frac{5}{7}$

19) $\frac{92}{3}$

20) Između C i D.

6.1 Omjeri, proporcije i procenti

I grupa zadataka(niži nivo– zadaci višestrukog izbora)

1) Iz proporcije $7:x=21:15$ nepoznata x je:

   a)7 b) 5 c) 3 d) 15

2) Iz proporcije $x:\frac{2}{3}=\frac{1}{2}:5$ nepoznata x je:

   a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{15}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $-\frac{1}{5}$

3) Koliko posto od 568 iznosi 426?

   a) 25% b) 33% c) 53% d) 75%

4) U razredu od 27 učenika, 8 učenika je završilo razred odličnim uspjehom. To je u procentima:

   a) 9% b) 29,62% c) 19,6% d) 15,2%

5) Ako se broj 110 umanji za 10% dobit će se broj:

   a) 99 b) 101 c) 100 d) 90

II grupa zadataka(srednji nivo)

6) Izračunati x iz proporcije: $(x-3):15=21:35$
7) Izračunati x iz proporcije: $7\frac{1}{2}:.x=\frac{3}{2}:\frac{11}{5}$
8) Odrediti x iz proporcije $(a+b):(a-b)=x:\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$
9) Broj 135 podijeliti na dva dijela u omjeru 7 : 8.
10) Od 35 kg brašna dobija se 50 kg hljeba. Koliko brašna treba za 60 kg hljeba?
11) Tri radnika mogu neki posao završiti za 12 sati. Za koliko će taj posao završiti 4 radnika?

12) Edi je dobio 21 bod od mogućih 35 bodova na ispitu iz matematike. Koliki je postotak ispita Edi riješio?
13) Koliko je bilo učenika u drugim razredima jedne škole ako je od ukupnog broja razred ponovilo 18 učenika ili 11,53 % ?
14) Koliki je procenat prolaznosti razreda od 32 učenika, ako razred ponavljaju 4 učenika?
15) Cijena proizvoda je 32 KM. Ako cijenu proizvoda smanjimo za 15% koja će biti nova cijena?

III grupa zadataka(viši nivo)

16) Za dezinfekciju uređaja za dijalizu upotrebljava se otopina u kojoj se dezinficijens i voda nalaze u omjeru 1:35. Koliko se mililitara otopine može napraviti sa 100 ml dezinficijensa?
17) Odrediti x, y, z i t ako vrijedi $x + y + z + t = 198$ i ako je $x : y : z : t = \frac{1}{3} : \frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{2}$.
18) Cijena knjige je 150 KM. Cijena je prvo snižena 30%, a nakon toga još 20%. Za koliko je cijena knjige smanjena?
19) Iz proporcija $x : y = 5 : 4,\ y : z = 8 : 15,\ z : 3 = 6 : 2$ odredi x.
20) Cijena neke robe je pala za 15% i sada iznosi 6,80 KM po kg. Kolika je prije bila cijena te robe?

6.1.1 Rješenja zadataka i upute

1) b) 5
2) b) $\frac{1}{15}$
3) d) 75%
4) b) 29,62%

5) a) 99
6) $x = 12$
7) $x = 11$
8) $x = \frac{a+b}{ab}$
9) 63 i 72
10) 42kg
11) 9 sati $(4:3 = 12:x)$
12) 60**%**
13) 156
14) 87.5%
15) 27.2 KM
16) Ukupna količina otopine je 3600 ml
17) 22,33,44,99
18) 66 KM
19) $x = 6$
20) 8 KM $\left(x - \frac{15x}{100} = 6{,}80\right)$

6.2 Polinomi

I grupa zadataka(niži nivo– zadaci višestrukog izbora)

1) Zadan je polinom $P(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{1}{4}$, $P(-2)$ je:

   a) 1 b) -2 c) 2 d) 4

2) Polinom $P(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ za $x = -1$ ima vrijednost:

   a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) – 1

3) Zbir polinoma $P(x) = 3x^2 - 5x - 2$ i $Q(x) = 5x^2 - x + 5$ je:

   a) $8x^2 - 6x + 3$ b) $8x^2 - 4x + 3$ c) $8x^2 - 6x - 3$ d) $8x^2 - 4x - 3$.

4) Razlika polinoma $A(x) = 2x^2 - 2x + 2 \; i \; B(x) = x^2 - x - 5$ iznosi:

   a) $x^2 - x - 3$ b) $x^2 - x - 7$ c) $x^2 - 3x - 3$ d) $x^2 - x + 7$.

5) Proizvod polinoma $P(x) = 3x + 9$ i $Q(x) = x - 3$ je:

   a) $3x^2 - 27$ b) $3x^2 + 6x - 27$ c) $3x^2 + 5x - 4$ d) $3x^2 - 9x$.

II grupa zadataka(srednji nivo)

6) Ako je $P(x+1) = x^3 - 3x + 1$ izračunati $P(-2)$.

7) Izračunati:

$$(3x^2 - 3x + 4)(2x^2 - 3).$$

8) Izračunati:

$$7x^3 - 8x^2 + (2x^2 - 3x + 4) \cdot (x + 5).$$

9) Pomnožiti polinome:

$$A(x) = 2x^2 - 3x + 1 \; i \; B(x) = x^2 - x - 5$$

10) Dati su polinomi:

$$P(x) = -5x^2 + 2x + 4 \; i \; Q(x) = +3x + 6.$$

Izračunati: $P(x) \cdot Q(x)$

11) Izračunati ostatak dijeljenja polinoma $P(x) = 3x^6 - 2x^5 + x^3 - 4x - 1$ binomom $Q(x) = x + 2$.

12) Odrediti ostatak pri dijeljenju polinoma $P(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^2 - 6x + 12$ sa $Q(x) = x + 1$.

13) Dati su polinomi: $A(x) = 2x^4 + 5x^3 - x^2 + 3x - 4$, $B(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 - x - 6$ i $C(x) = 3x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 2x - 5$.

Izračunati:

a) $A(x) + B(x) - C(x)$

b) $A(x) - B(x) + C(x)$

14) Odrediti količnik pri djeljenju polinoma $P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ sa $Q(x) = x - 2$.

15) Odrediti količnik i ostatak pri djeljenju polinoma $P(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 46x + 1$ sa $Q(x) = x + 3$.

III grupa zadataka(viši nivo)

16) Odrediti količnik polinoma $P(x) = x^4 + 4$ i $Q(x) = x^2 + 2x + 2$

17) Odrediti parametar *a* tako da polinom $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 16x + a$ bude djeljiv binomom $Q(x) = x + 3$.

18) U polinomu $P(x) = x^4 + kx^2 + k^2x - 10$ odrediti *k* tako da polinom bude djeljiv sa $x + 2$.

19) Odrediti realne vrijednosti parametara *a* i *b* tako da polinom $P(x) = ax^3 - bx^2 - 5x + 4$ pri djeljenju sa $x + 1$ daje ostatak 6, a pri djeljenju sa $x - 1$ daje ostatak 2.

20) Dat je polinom $P(x) = x^4 + x^3 + ax^2 + bx + c$. Odrediti realne parametre a, b, c tako da pri dijeljenju datog polinoma sa: $x-1, x-2, x-3$ ostaci dijeljenja budu redom 1, 2 i 3.

6.2.1 Rješenja zadataka i upute

1) c) 2
2) c) 1
3) a) $8x^2 - 6x + 3$
4) d) $x^2 - x + 7$
5) a) $3x^2 - 27$
6) $\mathrm{P}(-2) = -17$
7) $6x^4 - 6x^3 - x^2 + 9x - 12$
8) $9x^3 - x^2 - 11x + 20$
9) $A(x) \cdot B(x) = 2x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 14x - 5$
10) $P(x) \cdot Q(x) = 10x^4 - 11x^3 - 16x^2 + 24x + 24$
11) 255
12) 14
13) $a) - 6x^2 - 5$ $\quad b) 4x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 6x - 3$
14) $S(x) = x^2 - 3x + 1$
15) količnik: $S(x) = x^3 - 7x^2 + 25x - 29$, ostatak R = 88
16) $S(x) = x^2 - 2x + 2$
17) $a = -21$
18) $k = -1$
19) $a = 3, b = 0$ (Bezuov stav, sistem jednačina)
20) $a = 95, b = -54, c = -42$

6.3 Algebarski izrazi

I grupa zadataka(niži nivo– zadaci višestrukog izbora)

1) Nakon rastavljanja polinoma $ap - aq + bp - bq$ na faktore dobijamo:

   a) $(a + b)(p + q)$ b) $(a + b)(p - q)$

   c) $(a - b)(p + q)$ d) $(a - b)(p - q)$

2) Nakon rastavljanja $4 - 9x^2$ na faktore dobijamo:

   a) $(2 - 3x)(2 + 3x)$ b) $(4 + 9x)(4 - 9x)$

   c) $(2 + 3x)(2 + 3x)$ d) $(2 - 3x)(2 - 3x)$

3) Nakon rastavljanja $36a^2 - 49b^2$ na faktore dobijamo:

   a)$(6a - 7b)(6a + 7b)$ b) $(6 - 7b)(6 + 7b)$

   c)$(6a - 7b)(6a - 7b)$ d)$(6a + 7b)(6a + 7b)$

4) Kvadriranjem binoma $2x - 1$ dobijamo:

   a) $4x^2 + 4x + 4$ b) $4x^2 + 2x + 1$ c) $4x^2 + 4x + 1$ d) $4x^2 - 4x + 1$

5) Kvadriranjem binoma x + 3 dobijamo:

   a) $x^2 + 3x + 9$ b) $x^2 - 6x + 9$ c) $x^2 + 6x + 9$ d) $x^2 - 6x - 9$

II grupa zadataka(srednji nivo)

6) Rastaviti polinom na proste faktore:

$$a^2 - b^2 - c^2 - 2bc.$$

7) Rastaviti polinom na faktore:

$$(a + b + 1)^2 - (b - 2)^2.$$

8) Rastaviti na proste faktore:

   a) $x^2 - 2x - 3,$

b) $4a^2 - (b-c)^2$.

9) Rastavi polinom na faktore: $27a^3b - 12ab^3$.

10) Skratiti razlomak:

$$\frac{2x^2-8}{8-4x}.$$

11) Skratiti razlomak**:**

$$\frac{x^2-4x+4}{2x-4}.$$

12) Skratiti razlomak**:**

$$\frac{9x^2-6x+1}{3-27x^2}.$$

13) Pojednostaviti izraz:

$$\frac{9}{1-9x^2}\cdot\left(x-\frac{x-1}{4}\right),(x\neq\pm\frac{1}{3}).$$

14) Pojednostaviti izraz:

$$\frac{2m}{m^2-6m+9}-\frac{2m}{m^2-9}+\frac{1}{m+3},(m\neq\pm3)$$

15) Pojednostaviti izraz:

$$\frac{x}{x+2}-\frac{3x-2}{x-2}-\frac{4-2x^2-7x}{x^2-4},\ (x\neq\pm2)$$

III grupa zadataka(viši nivo)

16) Skratiti razlomak:

$$\frac{x^2-ax+bx-ab}{x^3+bx^2+ax+ab}$$

17) Pojednostaviti izraz:

$$\left(\frac{3x}{x+y}-\frac{x}{y-x}-\frac{2xy}{x^2-y^2}\right):\frac{4xy}{x^2-y^2},\ \ (x\neq\pm y;x\neq0;y\neq0)$$

18) Pojednostavi izraz:

$$\left(\frac{a-2}{a+2}-\frac{a+2}{a-2}\right):\frac{8a^3-16a}{a^2+4a+4}, a \neq \pm 2$$

19) Pojednostavi izraz:

$$\left(2+\frac{2x^2}{4-x^2}\right):\left(\frac{6+5x}{2-x}-3\right), x \neq \pm 2$$

20) Uprostiti izraz:

$$\left[\frac{(x+y)^2-4y^2}{x^2-y^2}-\frac{x-y}{x+y}\right]:\frac{2y}{x+y}, y \neq 0, x \neq \pm y.$$

6.3.1 Rješenja zadataka i upute

1) b) $(a+b)(p-q)$
2) a) $(2-3x)(2+3x)$
3) b) $(6-7b)(6+7b)$
4) d) $4x^2-4x+1$
5) c) x^2+6x+9
6) $(a-b-c)(a+b+c)$
7) $(a+3)(a+2b-1)$
8) a) $(x-3)(x+1)$, b) $(2a-b+c)(2a+b-c)$
9) $3ab(3a-2b)(3a+2b)$
10) $-\frac{x+2}{2}$
11) $\frac{x-2}{2}$
12) $\frac{3x-1}{3(1+3x)}$
13) $\frac{9}{4(1-3x)}$
14) $\frac{m+3}{(m-3)^2}$
15) $\frac{x}{x^2-4}$
16) $\frac{x-a}{x^2+a}$
17) $\frac{x-y}{y}$

18) $\frac{a+2}{2-a^2}$

19) $\frac{1}{x(x+2)}$

20) 2

6.4 Linearne funkcije

I grupa zadataka(niži nivo– zadaci višestrukog izbora)

1) Koordinate tačke M u kojoj grafik funkcije $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$ siječe koordinatu osu Oy su:

   a) $M\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ b) $M\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ c) $M\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ d) $M\left(0, -\frac{1}{4}\right)$

2) Grafik funkcije $y = -x - 1$ siječe koordinatu osu Ox. Koordinate tačke presjeka M su:

   a) $M(0, -1)$ b) $M\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ c) $M(-1,0)$ d) $M(1,0)$

3) Koeficijent pravca prave $2x + 2y - 1 = 0$ iznosi:

   a) 1 b) -1 c) 2 d) -2

4) Grafik funkcije $y = x - 2$ sadrži tačku:

   a) $A(2, 0)$ b) $A(1, 2)$ c) $A(3, 2)$ d) $A(2, 3)$

5) Vrijednost parametra a za koju su grafici funkcija $y = -x + a - 2$ i $y = ax - (3a - 1)$ paralelni je:

   a) $a = 1$ b) $a = 3$ c) $a = -1$ d) $a = -3$

II grupa zadataka(srednji nivo)

6) Odredi presječne tačke sa koordinatnim osama funkcije $y = \frac{2}{3}x - 1$.
7) U funkciji $y = (a - 3)x + 2a + 5$ odrediti parametar a pod uslovom da grafik funkcije prolazi tačkom $A(3, -1)$
8) U funkciji $y = (k - 1)x + k + 2$ odrediti parametar k tako da grafik prolazi tačkom $M(3,0)$.

9) Odrediti vrijednost parametra $p, p \in R$ tako da funkcija $y = \left(p - \frac{1}{2}\right)x + \left(p + \frac{3}{4}\right)$ bude rastuća.

10) Odrediti parametra m tako da funkcija $y = \left(\frac{1}{2}m - 2\right)x + \left(m - \frac{1}{2}\right)$ bude opadajuća.

11) U funkciji $y = (a-2)x - 2a + 3$, (a – realan broj), odredi vrijednost parametra a, tako da ova funkcija na pozitivnom dijelu y ose gradi odsječak dužine 5.

12) U funkcijama $y = (a-3)x + (a-2)$ i $y = (2a+1)x - (3a-1)$, (a – realan broj), odredi vrijednost parametra a, tako da grafici ovih funkcija budu paralelni.

13) U funkciji $(3m-1)x - y + 2m + 1 = 0$, (m – realan broj), odredi vrijednost parametra m, tako da grafike ove funkcije na pozitivnom dijelu ose Ox gradi odsječak dužine 2.

14) Dat je skup funkcija $y = (7m - 4)x - 3m - 2$ (m – realan broj). Odrediti vrijednost parametra *m* tako da je funkcija konstantna.

15) Odrediti vrijednost parametra m tako da funkcija $y = \frac{m-3}{2}x + 3m$ ima nulu za $x = 2$.

III grupa zadataka(viši nivo)

16) U funkciji $y = mx - \frac{1}{2}m - 4$ odrediti parametar m tako da njen grafik prolazi tačkom $A\left(-2, \frac{3m}{2}\right)$.

17) Odrediti jednačinu prave $y = kx + n$, čiji grafik prolazi tačkama $A(1,1)$ i $B(-1,-1)$.

18) Odrediti linearnu funkciju oblika $y = kx + n$ ako njen grafik prolazi tačkama $A(-3,-2)$ i $B(-5,2)$.

19) Za koje vrijednosti parametra a je funkcija $y = \frac{a-2}{4-a}x + a - \frac{1}{2}$ opadajuća?

20) Za koje vrijednosti parametra a je funkcija $(4-a)y = (a-2)x + a - \frac{1}{2}$ rastuća?

6.4.1 Rješenja zadataka i upute

1) d) $M\left(0,-\frac{1}{4}\right)$
2) c) $M(-1,0)$
3) b) -1
4) a) $A(2,0)$
5) c) $a = -1$
6) $(0,-1)\ i\ \left(\frac{3}{2},0\right)$
7) $a = \frac{3}{5}$
8) $k = \frac{1}{4}$
9) $p \in \left(\frac{1}{2},+\infty\right)$
10) $m \in (-\infty,4)$
11) $a = -1$
12) $a = -4$
13) $m = \frac{1}{8}$
14) $m = \frac{2}{3}$
15) $m = \frac{3}{4}$
16) $m = -1$
17) $y = x$
18) $y = -2x - 8$
19) $a \in (-\infty,2) \cup (4,+\infty)$
20) $a \in (2,4)$

6.5 Linearne jednačine i nejednačine. Sistemi linearnih jednačina

I grupa zadataka(niži nivo– zadaci višestrukog izbora)

1) Rješenje jednačine $-2x + 3 = 4x + 6$ je:

   a) $x = -\frac{1}{2}$ b) $x = -2$ c) $x = 2$ d) $x = \frac{1}{2}$

2) Rješenje nejednačine $2x - 1 > -5$ je:

   a) $x \in (-\infty, -2)$ b) $x \epsilon (-2, +\infty)$ c) $x \epsilon (-3, +\infty)$ d) $x \in (2, +\infty)$

3) Rješenje nejednačine $1 - x \leq 1$ je:

   a) $x \in (-\infty, 2)$ b) $x \epsilon [2, +\infty)$ c) $x \epsilon (-\infty, 0]$ d) $x \in [0, +\infty)$

4) Rješenje sistema jednačina $x + y = 5 \ \wedge x = -2$ je:

   a) $x = -2, y = 7$ b) $x = -2, y = -3$ c) $x = -2, y = -7$ d) $x = -2, y = 3$

5) Rješenje sistema jednačina $x + y = 5 \ \wedge x - y = -1$ je:

   a) $x = 2, y = 3$ b) $x = -2, y = -3$ c) $\mathrm{x} = 3, \mathrm{y} = 2$ d) $\mathrm{x} = -3, \mathrm{y} = -2$

II grupa zadataka(srednji nivo)

6) Riješiti jednačinu:

$$\frac{x-5}{2} + \frac{x-1}{8} = \frac{x-3}{4} + \frac{x-4}{3}.$$

7) Riješiti jednačinu:

$$(2x - 1)^2 - 4(x^2 - 4) = 45:5.$$

8) Riješiti jednačinu:

$$x - [3x - (5 + x)] + 8 = 3(x + 2) - 1.$$

9) Riješiti jednačinu:

$$\frac{20x+9}{2x+1} - \frac{24x^2+5}{4x^2-1} = \frac{40}{10x-5} + 4.$$

10) Riješiti nejednačinu:

$$\frac{x-4}{3} \geq \frac{x-6}{2} - 1.$$

11) Riješiti nejednačinu:

$$(x-3)^2 - 3 < x^2 + 4x.$$

12) Riješiti nejednačinu:

$$\frac{2x-1}{x-3} \geq 1.$$

13) Riješiti sistem jednačina:

$$6(3x+2) + 6(y-1) = 0$$
$$4(x-2) - (y+5) = -19$$

14) Riješiti sistem jednačina:

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = -5 \quad \wedge \quad \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}y = \frac{2}{3}.$$

15) Riješiti system jednačina:

$$\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{3} = 11 \quad \wedge \quad \frac{x}{11} - \frac{x-y}{9} = 1.$$

III grupa zadataka(viši nivo)

16) Proizvoljnom metodom riješiti sistem jednačina:

$$4x - 3y - z = 8 \quad \wedge \quad 3x - 5y + 2z = -5 \quad \wedge \quad 6x + 2y - 3z = 23.$$

17) Uvećamo li $\frac{1}{4}$ nekog broja za 1, dobijamo isto tako kao kad $\frac{1}{3}$ tog broja umanjimo za 1. Koji je to broj?
18) Podijeliti broj 100 na dva dijela tako da je zbir količnika koji se dobiju ako prvi dio podijelimo sa 8 i drugi sa 11 jednak 11.
19) Trećina zbira dva broja iznosi 12, polovina razlike tih brojeva je 9. Koji su to brojevi?
20) Zbir tri broja je 54, pri čemu je drugi broj za 5 manji od polovine prvog broja, a treći je broj za 4 veći od trećine drugog broja. Koji su to brojevi?

6.5.1 Rješenja zadataka i upute

1) a) $x = -\frac{1}{2}$
2) b) $x \epsilon (-2, +\infty)$
3) d) $x \in [0, +\infty)$
4) a) $x = -2, y = 7$
5) c) $x = 3, y = 2$
6) $x = 13$
7) $x = 2$
8) $x = 2$
9) $x = -1$
10) $x \in (-\infty, 16]$
11) $x \in \left(\frac{3}{5} + \infty\right)$
12) $x \neq 3, x \in (-\infty, -2] \cup (3, +\infty)$
13) $x = -1, y = 2$
14) $(x, y) = (4, -4)$
15) $(x, y) = (11,11)$
16) $x = 2, y = 1, z = -3$
17) $x = 24$
18) Jednačina $\frac{x}{8} + \frac{100-x}{11} = 11$. $x = 56$
19) Traženi brojevi su 27 i 9
20) $(x, y, z) = (34,12,8)$

6.C Primjer ispita za nivo C

1. Koliko je ukupno racionalnih brojeva u skupu: $\left\{-2, 0, \frac{2}{3}, 0.75, \sqrt{2}, \pi\right\}$?

   a) jedan, b) dva, c) tri, $\boxed{\text{d) četiri}}$.

2. Koliko posto od 568 iznosi 426?

   a) 25% b) 33% c) 53% $\boxed{\text{d) 75\%}}$

3. Zadan je polinom $P(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{1}{4}$, $P(-2)$ je:

   a) 1 b) -2 $\boxed{\text{c) 2}}$ d) 4

4. Koeficijent pravca prave $2x + 2y - 1 = 0$ iznosi:

   b) 1 $\boxed{\text{b) -1}}$ c) 2 d) -2

5. Odrediti x iz proporcije $(a + b):(a - b) = x:\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$

   Rješenje: $\boxed{x = \frac{a+b}{ab}}$

6. U funkciji $y = (k - 1)x + k + 2$ odrediti parametar k tako da grafik prolazi tačkom $M(3,0)$.

   Rješenje: $\boxed{.\ k = \frac{1}{4}}$

7. Pojednostaviti izraz: $\frac{2m}{m^2 - 6m + 9} - \frac{2m}{m^2 - 9} + \frac{1}{m + 3}$, $(m \neq \pm 3)$

Rješenje: $\boxed{\frac{m+3}{(m-3)^2}}$

8. Riješiti nejednačinu: $\frac{2x-1}{x-3} \geq 1$

Rješenje: $\boxed{.\ x \in (-\infty, -2] \cup (3, +\infty)}$

9. Odrediti realne vrijednosti parametara a i b tako da polinom $P(x) = ax^3 - bx^2 - 5x + 4$ pri djeljenju sa $x + 1$ daje ostatak 6, a pri djeljenju sa $x - 1$ daje ostatak 2.

Rješenje: $\boxed{a = 3, b = 0}$

10. Podijeliti broj 100 na dva dijela tako da je zbir količnika koji se dobiju ako prvi dio podijelimo sa 8 i drugi sa 11 jednak 11.

Rješenje: $\boxed{x = 56}$

Napomena: Tačna rješenja zadataka su uokvirena