Dodatak vodiču „B“ za škole za srednje stručno obrazovanje i obuku sa jednogodišnjim programom predmeta Matematika

školska 2015./2016. godina

MATEMATIKA

Predmetna komisija:

Dina Kamber

Maja Hrbat

Vernesa Mujačić

Mirsad Dumanjić

Sadržaj

Obrazovni ishodi po oblastima i temama za škole sa jednogodišnjim programom Matematike

I. Skup. Skupovi brojeva i operacije

Pojmovi/sadržaj	Ishodi učenja:
a. Skupovi ℕ, ℤ, ℚ, I, ℝ	Učenik treba znati: - razlikovati skupove ℕ, ℤ, ℚ, I, ℝ (poznavati termine: prirodan, cijeli, racionalan, iracionalan, realan broj te razlikovati navedene brojeve) - zapisivati skupove realnih brojeva intervalima i prikazivati ih na brojnoj osi - sabirati, oduzimati, množiti, dijeliti, korjenovati, stepenovati, te određivati apsolutne vrijednosti brojeva u skupovima ℕ, ℤ, ℚ, I, ℝ - prepoznati proste i složene brojeve

II. Omjeri, proporcije i procenti

Pojmovi/sadržaj	Ishodi učenja:
a. Omjeri, proporcije i procenti	Učenik treba znati: - upotrebljavati omjere i izračunavati procente - interpretirati i rješavati probleme sa procentima

III. Polinomi

Pojmovi/sadržaj	Ishodi učenja:
a. Polinomi. Sabiranje, oduzimanje i množenje polinoma. b. Dijeljenje polinoma. Bezuov stav	Učenik treba znati: - sabirati, oduzimati, množiti i stepenovati polinome jedne ili više promjenjivih - dijeliti polinome jedne promjenjive primjenom osnovnog postupka - primjenjivati Bezuov stav

IV. Algebarski izrazi

Pojmovi/sadržaj	Ishodi učenja:
a. Cijeli algebarski izrazi. Transformacija cijelih algebarskih izraza. Rastavljanje cijelih algebarskih izraza na faktore b. Razlomljeni algebarski izrazi. Transformacija razlomljenih algebarskih izraza	Učenik treba znati: - sabirati, oduzimati i množiti jednostavnije algebarske izraze - primjenjivati formule za kvadrat binoma i razliku kvadrata - razlikovati i imenovati cijele i racionalne algebarske izraze i određivati njihove oblasti definisanosti -sabirati, oduzimati, množiti i dijeliti jednostavnije razlomljene algebarske izraze

V. Linearne funkcije

Pojmovi/sadržaj	Ishodi učenja:
a. Pravougli koordinatni sistem u ravni b. Funkcija $y = kx + n$.	Učenik treba znati: - prikazati i pročitati koordinate tačaka u pravouglom koordinatnom sistemu - izračunati vrijednosti funkcije $y = kx + n$ - prikazati funkciju $y = kx + n$ grafički i tabelarno - odrediti nula-tačke funkcije $y = kx + n$ - odrediti koordinate presječnih tačaka grafa funkcije $y = kx + n$ s koordinatnim osama - iz zadanih svojstava, elemenata ili grafa odrediti funkciju - odrediti tok funkcije $y = kx + n$ - odrediti znak funkcije $y = kx + n$

VI. Linearne jednačine i nejednačine. Sistemi linearnih jednačina

Pojmovi/sadržaj	Ishodi učenja:
a. Rješavanje linearnih jednačina sa jednom nepoznatom b. Diskusija rješenja linearne jednačine sa jednom nepoznatom i jednim parametrom c. Rješavanje linearnih nejednačina sa jednom nepoznatom d. Rješavanje sistema linearnih jednačina sa dvije nepoznate. Metoda supstitucije. Gausova metoda. Metoda determinanti	Učenik treba znati: - rješavati linearne jednačine sa jednom nepoznatom i diskutovati rješenja ovisno o parametru - rješavati praktične probleme koji se mogu svesti na rješavanje linearnih jednačina - rješavati linearne nejednačine sa jednom nepoznatom i rješenja grafički prikazati na brojnoj osi - rješavati sisteme linearnih jednačina sa dvije nepoznate primjenom jedne od navedenih metoda

Primjeri zadataka po oblastima (sa rješenjima)

I. Skup. Skupovi brojeva i operacije

Primjer 1: Koliko skup $S = \left\{-2,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \sqrt{3},\ 5.6\right\}$ sadrži cijelih brojeva?

Rješenje: Skup S ima 5 elemenata, od čega su samo -2 i 0 cijeli brojevi. Tako da je odgovor: **Skup S sadrži 2 cijela broja.**

Primjer 2: Izračunati $\left[\left(\sqrt{2}-1\right)^2 + 2\frac{1}{3} + 2\sqrt{2}\right] : \left(\frac{2^2}{3}\right)^2$

Rješenje:

$$\left[\left(\sqrt{2}-1\right)^2 + 2\frac{1}{3} + 2\sqrt{2}\right] : \left(\frac{2^2}{3}\right)^2 = \left[\left(\sqrt{2}\right)^2 - 2\sqrt{2} + 1 + \frac{7}{3} + 2\sqrt{2}\right] : \left(\frac{4}{3}\right)^2 =$$

$$= \frac{16}{3} : \frac{16}{9} = \frac{16}{3} \cdot \frac{9}{16} = \mathbf{3}$$

II. Omjeri, proporcije i procenti

Primjer 1: Veličine $a, b\ , c, d, e$ se odnose kao 2 : 3 : 4 : 5 : 6. Odrediti te veličine, ako je $a + b + c + d + e = 540$.

Rješenje: Zbir veličina je $a + b + c + d + e = 540$. Pošto je $a\!:b\!:c\!:d\!:e = 2 : 3 : 4 :\ 5 : 6$, imamo:

I način

$$\frac{a+b+c+d+e}{2+3+4+5+6} = \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{5} = \frac{e}{6} = k$$

$$\frac{540}{20} = \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{5} = \frac{e}{6} = k \quad \Rightarrow \quad k = 27$$

$a = 2k \implies \boldsymbol{a} = \mathbf{54}$, $\quad b = 3k \implies \boldsymbol{b} = \mathbf{81}$, $\quad c = 4k \implies \boldsymbol{c} = \mathbf{108}$,
$d = 5k \implies \boldsymbol{d} = \mathbf{135}$, $\quad e = 6k \implies \boldsymbol{e} = \mathbf{162}$

II način

$a = 2k,\ b = 3k,\ c = 4k,\ d = 5k,\ e = 6k$

$2k + 3k + 4k + 5k + 6k = 540 \Rightarrow\ 20\,k = 540 \ \Rightarrow\ k = 27$

$\boldsymbol{a} = \mathbf{54}$, $\ \boldsymbol{b} = \mathbf{81}$, $\ \boldsymbol{c} = \mathbf{108}$, $\ \boldsymbol{d} = \mathbf{135}$, $\ \boldsymbol{e} = \mathbf{162}$

Primjer 2: Koliko iznosi 40% nekog broja, ako 14% istog broja iznosi 343?

Rješenje: 14% broja x iznosi 343 $\Rightarrow$ $0{,}14x = 343$ $\Rightarrow$ $x = 2450$

pa je 40% broja $x = 2450$ $\Longrightarrow$ $0{,}40x = 0{,}40 \cdot 2450 = \mathbf{980}$

III. Polinomi

Primjer 1: Odrediti ostatak pri dijeljenju polinoma $P(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ sa polinomom $Q(x) = x - 1$, pomoću Bezuovog stava.

Rješenje:

Po Bezuovom stavu, ostatak R pri dijeljenju polinoma $P(x)$ sa $Q(x) = x - 1$, jednak je:

$$R = P(1) = 2 \cdot 1^4 - 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 1$$

$$\boldsymbol{R = 1}$$

Primjer 2: Odrediti količnik i ostatak pri dijeljenju polinoma $P(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 46x + 1$ sa $Q(x) = x + 3$

Rješenje: Koristit ćemo osnovni algoritam za dijeljenje polinoma.

$$
\begin{array}{l}
(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 46x + 1) : (x + 3) = x^3 - 7x^2 + 25x - 29 \\
\underline{\pm x^4 \pm 3x^3} \\
\quad - 7x^3 + 4x^2 + 46x + 1 \\
\quad \underline{\mp 7x^3 \mp 21x^2} \\
\qquad\qquad 25x^2 + 46x + 1 \\
\qquad\qquad \underline{\pm 25x^2 \pm 75x} \\
\qquad\qquad\qquad -29x + 1 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\mp 29x \mp 87} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (88)
\end{array}
$$

pa je količnik $\boldsymbol{S(x) = x^3 - 7x^2 + 25x - 29}$, a ostatak $\boldsymbol{R = 88}$.

IV. Algebarski izrazi

Primjer 1: Rastaviti na faktore $x^4 - 5x^2 + 4$

Rješenje:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = x^4 - 4x^2 - x^2 + 4 = x^2(x^2 - 4) - (x^2 - 4) =$$
$$= (x^2 - 4)(x^2 - 1) = \boldsymbol{(x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1)}$$

Primjer 2: Pojednostaviti izraz $\left(\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{2x-1}{2x+1}\right):\frac{4x}{4x^2-1}$ za $x \neq \pm\frac{1}{2}$

Rješenje:

$$\left(\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{2x-1}{2x+1}\right):\frac{4x}{4x^2-1}=\frac{(2x+1)^2-(2x-1)^2}{(2x-1)(2x+1)}:\frac{4x}{(2x-1)(2x+1)}=$$
$$=\frac{4x^2+4x+1-(4x^2-4x+1)}{(2x-1)(2x+1)}\cdot\frac{(2x-1)(2x+1)}{4x}=$$
$$=\frac{4x^2+4x+1-4x^2+4x-1}{1}\cdot\frac{1}{4x}=\frac{8x}{4x}=\mathbf{2}$$

V. Linearne funkcije

Primjer 1: Odrediti parametar m tako da funkcija $y=(4m-6)x-(3m-2)$ ima nulu $x=2$.

Rješenje: Pošto je nula funkcije $x=2$, to znači da za $x=2$ funkcija ima vrijednost $y=0$. Pa uvrštavajući $x=2$ i $y=0$ u datu funkciju, dobijamo:

$$0=(4m-6)\cdot 2-(3m-2)$$

$$0=8m-12-3m+2$$

$$0=5m-10$$

$$\boldsymbol{m}=\mathbf{2}\ \text{(funkcija } \boldsymbol{y}=\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\mathbf{4}\text{)}$$

Primjer 2: Odrediti parametar a tako da grafik funkcije $y=(a-4)x-3a+10$ bude paralelan sa x-osom.

Rješenje: Linearne funkcije $y=kx+n$ čiji je grafik paralelan sa x-osom date su kao $y=n$, tj. imaju koeficijent smjera jednak nuli.

Koeficijent smjera date funkcije je $k=a-4$, pa ga izjednačavamo sa nulom:

$$a-4=0$$

$$\boldsymbol{a}=\mathbf{4}\ \text{(funkcija } \boldsymbol{y}=-\mathbf{2}\text{)}$$

VI. Linearne jednačine i nejednačine. Sistemi linearnih jednačina

Primjer 1: Odrediti najmanji prirodan broj za kojeg vrijedi: $(x-1)^2-(x+1)^2<-10-x$

Rješenje: Prvo ćemo riješiti datu nejednačinu:

$$(x-1)^2-(x+1)^2<-10-x$$

$$(x^2-2x+1)-(x^2+2x+1)<-10-x$$

$$x^2-2x+1-x^2-2x-1<-10-x$$

$$-2x-2x<-10-x$$

$$-3x<-10/:(-3)$$

$$x>\frac{10}{3}$$

$$x>3\frac{1}{3}$$

Znači, rješenje nejednačine su svi realni brojevi veći od $3\frac{1}{3}$. Najmanji prirodan broj, veći od $3\frac{1}{3}$, je 4. **Dakle, najmanji prirodan broj za kojeg vrijedi data nejednačina je 4**.

Primjer 2: Riješiti nejednačinu $\frac{2x-3}{4-x}<3$

Rješenje:

$$\frac{2x-3}{4-x}-3<0$$

$$\frac{2x-3-3(4-x)}{4-x}<0$$

$$\frac{2x-3-12+3x}{4-x}<0$$

$$\frac{5x-15}{4-x}<0\ \ /:5$$

$$\frac{x-3}{4-x}<0$$

Rješenje ove nejednačine naći ćemo pomoću sljedeće tabele:

	-∞ 3	3 4	4 ∞
$x-3$	-	+	+
$4-x$	+	+	-
$\frac{x-3}{4-x}$	-	+	-

Pa je rješenje naše nejednačine $\boldsymbol{x} \in (-\infty, \mathbf{3}) \cup (\mathbf{4}, +\infty)$.

Primjer 3: Riješiti sistem
$$\begin{aligned}(a-3)(b-1) &= a(b-4)\\ (a-1)(b+2) &= (a+15)(b-6)\end{aligned}$$

Rješenje:

$$(a-3)(b-1) = a(b-4)$$
$$\underline{(a-1)(b+2) = (a+15)(b-6)}$$

$$ab - a - 3b + 3 = ab - 4a$$
$$\underline{ab + 2a - b - 2 = ab - 6a + 15b - 90}$$

$$-a + 4a = 3b - 3$$
$$\underline{2a + 6a - b - 15b = -90 + 2}$$

$$3a = 3b - 3 \ \ /:3$$
$$\underline{8a - 16b = -88 \ /:8}$$

$$a = b - 1$$
$$\underline{a - 2b = -11}$$

$$a = b - 1$$
$$\underline{b - 1 - 2b = -11}$$

$$a = b - 1$$
$$\underline{-b = -10 \ /\cdot(-1)}$$

$$a = b - 1$$
$$\underline{\boldsymbol{b} = \mathbf{10}}$$
$$\boldsymbol{a} = \mathbf{9}$$
$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\mathbf{9}, \mathbf{10})$$

Primjer 4: Riješiti jednačinu $\frac{1}{4x-6} + \frac{1}{8x+12} - \frac{3(2x+1)}{4x^2-9} = 0$

Rješenje: Prvo rastavljamo na faktore algebarske izraze u nazivniku i određujemo definiciono područje jednačine:

$$\frac{1}{4x-6} + \frac{1}{8x+12} - \frac{3(2x+1)}{4x^2-9} = 0$$

$$\frac{1}{2(2x-3)} + \frac{1}{4(2x+3)} - \frac{3(2x+1)}{(2x-3)(2x+3)} = 0$$

Definiciono područje: $2x - 3 \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{x} \neq \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$ i $2x + 3 \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{x} \neq -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$

Sad jednačinu množimo sa najmanjim zajedničkim sadržaocem (NZS) izraza $2(2x-3)$, $4(2x+3)$ i $(2x-3)(2x+3)$, a to je $4(2x-3)(2x+3)$

$$\frac{1}{2(2x-3)}+\frac{1}{4(2x+3)}-\frac{3(2x+1)}{(2x-3)(2x+3)}=0 \ /\cdot\ 4(2x-3)(2x+3)$$

$$2(2x+3)+(2x-3)-12(2x+1)=0$$

$$4x+6+2x-3-24x-12=0$$

$$-18x-9=0$$

$$x=-\frac{1}{2}$$

Pošto $x=-\frac{1}{2}$ pripada definicionom području, to je rješenje date jednačine.

Primjer 5: U školi je 600 učenika. Omjer dječaka i djevojčica u ovoj školi je $3:5$. Koliko djevojčica, a koliko dječaka pohađa ovu školu?

Rješenje: Označimo broj dječaka koji pohađaju ovu školu sa x. Tada je broj djevojčica u školi jednak $600-x$. Tada imamo:

$$x:(600-x)=3:5$$

$$5\cdot x=3\cdot(600-x)$$

$$5x=1800-3x$$

$$8x=1800$$

$$x=225$$

Dakle, školu pohađa 225 dječaka. Djevojčica u školi ima $600-x=600-225=375$.

Primjer ispita za eksternu maturu

Napomena: Rješenja zadataka su $\boxed{\text{uokvirena}}$.

---

1. Izračunati: $\frac{\left[2\frac{1}{2}-\left(2+\sqrt{3}\right)^2+4\sqrt{3}\right]^2}{\left(1\frac{1}{2}\right)^2}$

Rješenje je:
a) $\boxed{9}$
b) 10
c) 11
d) 12

2. Izračunati x, ako je $(x-3) : 15 = 21 : 35$.

Rješenje je:
a) $x = 9$
b) $x = 10$
c) $x = 11$
d) $\boxed{\boldsymbol{x = 12}}$

3. Cijena neke robe je snižena 20% i sad iznosi 484 KM. Kolika je bila stara cijena, prije sniženja?

Rješenje je:
a) 595 KM
b) 600 KM
c) $\boxed{\textbf{605 KM}}$
d) 610 KM

4. Odrediti ostatak pri dijeljenju polinoma $P(x) = -2x^3 + 3x^2 - 3x + 4$ sa $Q(x) = x - 2$.

$\boxed{\textbf{Rješenje je } \boldsymbol{R = -6}}$

5. Rastaviti na faktore $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$

$\boxed{\textbf{Rješenje je } \boldsymbol{(a+b-c)(a-b+c)}}$

6. Pojednostaviti izraz što je više moguće $\frac{(ax+1)^2-(x+a)^2}{(1-x^2)(1-a^2)}$, $x \neq \pm 1, a \neq \pm 1$

$\boxed{\textbf{Rješenje je 1}}$

7. Odrediti parametar *m* tako da grafik funkcije $y = (m-2)x - 3(m-3)$ prolazi tačkom $A(5,7)$.

$\boxed{\textbf{Rješenje je } \boldsymbol{m = 4}}$

8. U torbi se nalazi $\frac{1}{4}$ zelenih, $\frac{1}{8}$ plavih, $\frac{1}{12}$ žutih i 26 bijelih loptica. Koliko je plavih loptica u torbi?

$\boxed{\textbf{Rješenje: U torbi ima 6 plavih kuglica.}}$

9. Riješiti sistem jednačina: $\begin{cases} 2(x+1)(5y-6) = (5x+7)(2y-3) \\ (x+8)(y+1) = (y+3)(x+5) \end{cases}$

$\boxed{\textbf{Rješenje je } \boldsymbol{(x,y) = (1,3)}}$

10. Riješiti nejednačinu: $(x-3)(x+1) - (x+2)^2 \leq 1$

$\boxed{\textbf{Rješenje je } \boldsymbol{x \geq -\frac{4}{3}}}$