VODIČ „A“ za gimnazije
školska 2015./2016. godina

MATEMATIKA

Predmetna komisija:

Dina Kamber

Maja Hrbat

Vernesa Mujačić

Mirsad Dumanjić

Sadržaj

Uvod

MATEMATIKA je na eksternoj maturi obavezni predmet za sve učenike koji su završili srednju školu sa četverogodišnjim obrazovanjem.

Svi ispitni ciljevi koji se žele postići eksternom maturom iz predmeta Matematika, kao i očekivani rezultati, temelje se na elementima definisanim Nastavnim planom i programom za gimnazije i tehničke škole u Kantonu Sarajevo. Osnovni zadatak eksterne mature iz predmeta Matematika je da izvrši generalnu provjeru temeljnih znanja, sposobnosti i vještina učenika u skladu sa matematičkim kompetencijama neophodnim kako za nastavak školovanja, tako i za rješavanje problema iz svakodnevnog života.

U skladu s tim, opći ciljevi eksterne mature iz predmeta Matematika su:

1. Provjera matematičkih znanja, sposobnosti i vještina stečenih u toku četverogodišnjeg školovanja u gimnazijama i srednjim tehničkim školama koji su definisani kroz Nastavni plan i program predmeta i ovim Vodičem
2. Provjera usvojenosti matematičke pismenosti i pravilnog korištenja matematičkog vokabulara, matematičke sintakse i uopće razumijevanje matematičkog jezika pri čitanju, interpretiranju i rješavanju matematičkih zadataka
3. Provjera usvojenosti matematičkih koncepata, kao i njihovo povezivanje sa ostalim predmetima
4. Provjera usvojenosti znanja i vještina potrebnih za dalji nastavak školovanja
5. Provjera ovladanosti proceduralnim tehnikama koje se primjenjuju u odnosu na odgovarajuće matematičke koncepte
6. Podsticanje unapređivanja nastave – učenja i unapređivanje predmetnog programa Matematike

Ovaj vodič je osnovni dokument ispita koji sadrži informacije o sadržaju ispita i njime je određeno koje znanje se od učenika očekuje na kraju četverogodišnjeg školovanja.

Eksternu maturu na nivou A polažu učenici koji su završili gimnaziju i učenici koji su završili tehničku školu a žele polagati matematiku na nivou A radi upisa na visokoškolsku ustanovu koja zahtijeva poznavanje matematike na višem nivou.

Ovaj vodič sadrži:

1) oblasti i teme sa ishodima koje su obuhvaćene eksternom maturom za nivo A
2) primjere zadataka za svaku oblast za nivo A
3) primjer jednog ispita na osnovu datih tema i ishoda za nivo A

Obrazovni ishodi po oblastima i temama za nivo A

I. Skup. Skupovi brojeva i operacije

Pojmovi/sadržaj	Ishodi učenja:
Skupovi brojeva a. Skupovi ℕ, ℤ, ℚ, I, ℝ, ℂ b. Omjeri, proporcije i procenti c. Operacije u skupu kompleksnih brojeva d. Grafičko predstavljanje realnih i kompleksnih brojeva e. Trigonometrijski oblik kompleksnog broja	Učenik treba znati: - razlikovati skupove ℕ, ℤ, ℚ, I, ℝ, ℂ (poznavati termine: prirodan, cijeli, racionalan, iracionalan, realan, kompleksan broj te razlikovati navedene brojeve) - prepoznati i upotrebljavati simbole intervala: (a,b), [a,b), (a,b], [a,b] - zapisivati skupove realnih brojeva intervalima i prikazivati ih na brojnoj osi - sabirati, oduzimati, množiti, dijeliti, korjenovati, stepenovati, te određivati apsolutne vrijednosti brojeva u skupovima ℕ, ℤ, ℚ, I, ℝ - upotrebljavati omjere i izračunavati procente - interpretirati i rješavati probleme sa procentima - upotrebljavati zapis kompleksnih brojeva u algebarskom i trigonometrijskome obliku - određivati realni i imaginarni dio kompleksnog broja - sabirati, oduzimati, množiti, dijeliti, korjenovati, stepenovati, te određivati modul kompleksnih brojeva
Stepeni i korijeni f. Stepeni sa cjelobrojnim eksponentima. Operacije sa stepenima g. Korijeni. Operacije sa korijenima h. Stepeni sa racionalnim eksponentima i. Racionalizacija nazivnika	Učenik treba znati: - primjenjivati pravila za računanje sa stepenima sa cjelobrojnim eksponentom za generisanje ekvivalentnih numeričkih izraza, - razumjeti i primjenjivati oblast definisanosti korjenske funkcije i njene osobine - primjenjivati pravila za računanje sa korijenima za generisanje ekvivalentnih numeričkih izraza, - prepoznati stepen čiji je eksponent racionalan broj i primjenjivati vezu - primjenjivati pravila za računanje sa stepenima s racionalnim eksponentom za generisanje ekvivalentnih numeričkih izraza - racionalisati nazivnik
Binomni obrazac i nizovi j. Binomni obrazac k. Aritmetički niz l. Geometrijski niz i red m. Granična vrijednost niza	Učenik treba znati: - primjenjivati binomni obrazac i osobine binomnih koeficijenata - prepoznati aritmetički niz - odrediti opći član, te sumu prvih n-članova koristeći definiciju i osobine aritmetičkog niza - prepoznati geometrijski niz - odrediti opći član te sumu prvih n-članova i sumu reda koristeći definiciju i osobine geometrijskog niza i reda - izračunavati graničnu vrijednost niza u elementarnim slučajevima, - izračunavati graničnu vrijednost sume članova geometrijskog niza u slučaju kada je $\|q\|<1$

II. Algebarski izrazi

Pojmovi/sadržaj	Ishodi učenja:
a. Cijeli algebarski izrazi. Transformacija cijelih algebarskih izraza. b. Polinomi. Sabiranje, oduzimanje i množenje polinoma. Dijeljenje polinoma. Bezuov teorem c. Teorem o identičnosti polinoma d. Razlomljeni algebarski izrazi. Transformacija razlomljenih algebarskih izraza	Učenik treba znati: - sabirati, oduzimati i množiti jednostavnije algebarske izraze - riješiti problemski zadatak prikazivanjem problemske situacije brojnim izrazom i izračunavanjem njegove vrijednosti - primjenjivati formule za kvadrat i kub binoma i razliku kvadrata, kao i formule za zbir i razliku kubova - sabirati, oduzimati, množiti i stepenovati polinome jedne ili više promjenjivih - dijeliti polinome jedne promjenjive primjenom osnovnog postupka, kao i primjenom Hornerove sheme - primjenjivati Bezuov stav - primjenjivati Teorem o identičnosti polinoma na jednostavnije zadatke - razlikovati i imenovati cijele i racionalne algebarske izraze i uspješno određivati njihove oblasti definisanosti - sabirati, oduzimati, množiti i dijeliti jednostavnije razlomljene algebarske izraze

III. Geometrija u ravni

Pojmovi/sadržaj	Ishodi učenja:
a. Trougao. Podudarnost trouglova. Sličnost trouglova b. Krug i kružnica. c. Četverougao d. Tangentni i tetivni četverougao e. Sličnost mnogouglova f. Obimi i površine figura u ravni	Učenik treba znati: - razlikovati konveksne i nekonveksne figure, vrste uglova, vrste trouglova, vrste četverouglova, kao i kružnicu i krug - primjenjivati osnovna svojstva trouglova pri rješavanju jednostavnijih problemskih zadataka - razlikovati značajne tačke trougla - primjenjivati stavove podudarnosti trouglova pri rješavanju problemskih zadataka - odrediti i primijeniti koeficijent sličnosti - primjenjivati stavove sličnosti trouglova pri rješavanju jednostavnijih problemskih zadataka - primjenjivati Pitagorin teorem i njegov obrat pri rješavanju problemskih zadataka - primjenjivati osnovna svojstva četverouglova, kao i tangentnih i tetivnih četverouglova pri rješavanju problemskih zadataka - odrediti elemente kružnice i kruga (centar i poluprečnik, kružni luk, kružni isječak, centralni i periferni ugao, tetiva i tangenta) i primjenjivati njihove osobine - primjenjivati teorem o odnosu između centralnog i periferijskog ugla nad istim kružnim lukom - primjenjivati formule za izračunavanje obima i površine geometrijskih figura u ravni

IV. Analitička geometrija u ravni

Pojmovi/sadržaj	Ishodi učenja:
Koordinatni sistem u ravni a. Udaljenost između dvije tačke. Koordinate središta duži b. Koordinate težišta trougla. Površina trougla c. Funkcija direktne proporcionalnosti $y = kx$. Funkcija $y = kx + n$ d. Funkcija obrnute proporcionalnosti $y = \frac{k}{x}$	Učenik treba znati: - prikazati i pročitati koordinate tačaka u pravouglom koordinatnom sistemu - izračunati udaljenost između dvije tačke - primjenjivati formulu za izračunavanje koordinata središta duži, koordinata težišta trougla i površine trougla pri rješavanju jednostavnijih zadataka - odrediti domenu funkcija $y = kx + n$ i $y = \frac{k}{x}$ - izračunati vrijednosti funkcija $y = kx + n$ i $y = \frac{k}{x}$ - prikazati funkcije $y = kx + n$ i $y = \frac{k}{x}$ grafički i tabelarno - interpretirati graf funkcija $y = kx + n$ i $y = \frac{k}{x}$ - odrediti nula-tačke funkcije $y = kx + n$ - odrediti koordinate presječnih tačaka grafa funkcije $y = kx + n$ sa koordinatnim osama - iz zadanih svojstava, elemenata ili grafa odrediti funkciju - odrediti tok i znak funkcija $y = kx + n$ i $y = \frac{k}{x}$
Analitička geometrija e. Jednačina prave (eksplicitni, implicitni i normalni oblik) f. Jednačina prave kroz dvije tačke g. Odnos dviju pravih (presjek, ugao, uslov paralelnosti i normalnosti) h. Jednačina konika. Tangenta i normala na konike	Učenik treba znati: - upotrebljavati eksplicitni, implicitni i normalni oblik jednačine prave - odrediti jednačinu prave zadane pravouglim koordinatama tačke i koeficijentom smjera - odrediti jednačinu prave zadane zadane pravouglim koordinatama dvije tačke - primijeniti postupak ispitivanja međusobnog odnosa dvije prave - primijeniti uslov paralelnosti i normalnosti - izračunati ugao između dvije prave - izračunati pravougle koordinate presječne tačke dvije prave - izračunati udaljenost tačke od prave - odrediti jednačinu kružnice iz zadanih elemenata i obratno - odrediti jednačinu elipse iz zadanih elemenata i obratno - odrediti jednačinu hiperbole iz zadatih elemenata i obratno te primjenjivati pojam i jednačine asimptota - odrediti jednačinu parabole iz zadatih elemenata i obratno - odrediti odnos između konika i prave – ugao, presječne tačke, tačke dodira ukoliko postoje - odrediti jednačinu tangente u tački krive - primjenjivati uvjet dodira prave i konike

V. Linearne jednačine i nejednačine. Sistemi linearnih jednačina

Pojmovi/sadržaj	Ishodi učenja:
a. Rješavanje linearnih jednačina sa jednom nepoznatom b. Rješavanje linearnih jednačina sa apsolutnim vrijednostima c. Diskusija rješenja linearne jednačine sa jednom nepoznatom d. Rješavanje linearnih nejednačina sa jednom nepoznatom e. Rješavanje linearnih nejednačina sa apsolutnim vrijednostima f. Rješavanje sistema linearnih jednačina sa dvije i tri nepoznate. Metoda supstitucije. Gausova metoda. Metoda determinanti	Učenik treba znati: - rješavati linearne jednačine sa jednom nepoznatom i diskutovati rješenja ovisno o parametru - rješavati linearne jednačine sa apsolutnim vrijednostima - rješavati linearne nejednačine sa jednom nepoznatom i rješenja grafički prikazati na brojnoj osi - rješavati linearne nejednačine sa apsolutnim vrijednostima - rješavati sisteme linearnih jednačina sa dvije ili tri nepoznate primjenom jedne od navedenih metoda

VI. Kvadratne funkcije, jednačine i nejednačine. Jednačine višeg reda. Iracionalne jednačine

Pojmovi/sadržaj	Ishodi učenja:
Kvadratne funkcije, jednačine i nejednačine a. Grafik kvadratne funkcije $y = ax^2 + bx + c$ (nule, ekstrem, tok, znak) b. Rješavanje kvadratne jednačine. Vietove formule c. Rješavanje kvadratne nejednačine d. Diskriminanta kvadratne jednačine	Učenik treba znati: - odrediti domenu kvadratne funkcije - nacrtati grafik kvadratne funkcije, kao i znati s grafika interpretirati njene osobine - izračunati vrijednosti kvadratne funkcije - odrediti nula-tačke kvadratne funkcije - odrediti koordinate presječnih tačaka grafa kvadratne funkcije s koordinatnim osama - odrediti i primijeniti ekstreme kvadratne funkcije - odrediti tok i znak kvadratne funkcije - riješiti kvadratnu jednačinu primjenom formule za rješenja kvadratne jednačine i znati zavisnost prirode rješenja od diskriminante - primjenjivati Vietove formule u jednostavnijim slučajevima - primjenjivati rastav kvadratnog trinom na proste faktore - na osnovu datih rješenja formirati kvadratnu jednačinu - rješavati kvadratne nejednačine analitički i grafički

Jednačine višeg reda e. Jednačine višeg reda (bikvadratna, kubna, simetrična)	Učenik treba znati: - rješavati bikvadratne jednačine kao i ostale jednačine višeg reda koje se svode na kvadratnu jednačinu
Iracionalne jednačine f. Iracionalne jednačine	Učenik treba znati: - usvojiti i primjenjivati definiciono područje iracionalne jednačine - rješavati jednostavnije primjere iracionalnih jednačina

VII. Eksponencijalne funkcije, jednačine i nejednačine. Logaritamske funkcije, jednačine i nejednačine

Pojmovi/sadržaj	Ishodi učenja:
Eksponencijalne funkcije, jednačine i nejednačine a. Eksponencijalna funkcija $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$. Svojstva i grafik b. Eksponencijalne jednačine c. Eksponencijalne nejednačine	Učenik treba znati: - odrediti domenu eksponencijalne funkcije - nacrtati grafik eksponencijalne funkcije, kao i znati s grafika interpretirati njene osobine - izračunati vrijednosti eksponencijalne funkcije - odrediti tok i znak eksponencijalne funkcije - prepoznati i riješiti eksponencijalne jednačine - prepoznati i riješiti eksponencijalne nejednačine - koristiti osobine eksponencijalnih funkcija pri rješavanju eksponencijalnih jednačina i nejednačina
Logaritamske funkcije, jednačine i nejednačine d. Logaritamska funkcija $y = \log_a x$. Svojstva i grafik e. Logaritamske jednačine f. Logaritamske nejednačine	Učenik treba znati: - odrediti domenu logaritamske funkcije - nacrtati grafik logaritamske funkcije, kao i znati s grafika interpretirati njene osobine - izračunati vrijednosti logaritamske funkcije - odrediti tok i znak logaritamske funkcije - primjenjivati pravila logaritmiranja - prepoznati i riješiti logaritamske jednačine - prepoznati i riješiti logaritamske nejednačine - koristiti osobine logaritamskih funkcija pri rješavanju - rješavati jednačine/nejednačine koje se mogu riješiti direktnom primjenom logaritmiranja - rješavati jednačine/nejednačine koje se mogu riješiti direktnom primjenom definicije logaritma - rješavati jednačine/nejednačine primjenom osnovnih pravila računanja s eksponentima i logaritmima - rješavati jednačine/nejednačine koje se supstitucijom mogu svesti na kvadratne

VIII. Trigonometrija

Pojmovi/sadržaj	Ishodi učenja:
a. Dokazivanje trigonometrijskih identiteta b. Primjena trigonometrije pri rješavanju planimetrijskih i stereometrijskih zadataka c. Primjena sinusne i kosinusne teoreme d. Trigonometrijske jednačine e. Trigonometrijske nejednačine	Učenik treba znati: - primjenjivati trigonometrijske funkcije oštrih uglova na rješavanje zadataka iz planimetrije i stereometrije - primjenjivati osnovni trigonometrijski identitet, adicione formule, formule za izračunavanje trigonometrijskih funkcija dvostrukog i polovičnog ugla - primjenjivati sinusnu i kosinusnu teoremu pri rješavanju zadataka - odrediti opće rješenje trigonometrijske jednačine/nejednačine ili rješenja iz zadanog intervala koristeći definicije trigonometrijskih funkcija - odrediti opće rješenje trigonometrijske jednačine/nejednačine ili rješenja iz zadanog intervala koristeći trigonometrijske identitete i formule - rješavati jednačine koje se supstitucijom mogu svesti na kvadratne

IX. Geometrija u prostoru

Pojmovi/sadržaj	Ishodi učenja:
Stereometrija a. Prizma, kvadar, kocka. Dijagonalni presjeci. Površina i zapremina b. Piramida. Zarubljena piramida. Površina i zapremina c. Valjak. Površina i zapremina d. Kupa. Zarubljena kupa. Površina i zapremina e. Lopta. Površina i zapremina	Učenik treba znati: - skicirati geometrijska tijela - prepoznati elemente tijela – osnovu (bazu), vrh, visinu, strane i omotač - primjenom odgovarajućih formula izračunati površinu i zapreminu geometrijskih tijela - izračunati obim i površinu dijagonalnog presjeka prizme - izračunati zapreminu geometrijskog tijela nastalog rotacijom trougla i četverougla
Vektori f. Osnovne operacije sa vektorima (sabiranje, oduzimanje, množenje vektora skalarom) g. Linearna kombinacija vektora. Linearna zavisnost i nezavisnost vektora h. Skalarni proizvod vektora i. Vektorski proizvod vektora j. Mješoviti proizvod vektora. Uvjet komplanarnosti vektora	Učenik treba znati: - sabirati vektore i množiti vektore skalarom - primjenjivati koordinatni prikaz vektora - odrediti dužinu vektora - odrediti ugao među vektorima - primjenjivati osobine skalarnog, vektorskog i mješovitog proizvoda na jednostavnije zadatke - primjenjivati osobine skalarnog, vektorskog i mješovitog proizvoda na rješavanje zadataka iz geometrije

X. Realne funkcije jedne promjenjive. Diferencijalni račun. Integralni račun

Pojmovi/sadržaj	Ishodi učenja:
a. Područje definisanosti (domen) i područje vrijednosti funkcije (kodomen) b. Granična vrijednost funkcije c. Asimptote funkcije (horizontalna, vertikalna i kosa asimptota) d. Primjena izvoda na traženje ekstrema funkcije i prevojnih tačaka, te određivanje monotonosti, konkavnosti i konveksnosti funkcije e. Grafik funkcije f. Neodređeni i određeni integral g. Primjena integralnog računa na izračunavanje površina ravnih figura, dužine luka krive i zapremine	Učenik treba znati: -odrediti područje definisanosti (domen) i područje vrijednosti funkcije (kodomen) -izračunati graničnu vrijednost funkcije u elementarnim slučajevima -odrediti asimptote jednostavnijih funkcija, ukoliko postoje -primjenjivati osnovna pravila za izračunavanje izvoda pri rješavanju jednostavnih ekstremalnih zadataka - primjenjivati diferencijalni račun prilikom ispitivanja oblasti monotonosti, konkavnosti i konveksnosti funkcije - crtati grafike jednostavnih funkcija -primjenjivati metod supstitucije i parcijalne integracije na jednostavnije zadatke - neposredno računati neke elementarne neodređene integrale - primjenjivati Njutn-Lajbnicovu formulu, - primjenjivati integralni račun za izračunavanje površine jednostavnih figura, zapremine nekih rotacionih tijela i dužine nekih krivih

Primjeri zadataka po oblastima (sa rješenjima) za nivo A

I. Skup. Skupovi brojeva i operacije

Primjer 1: Primjenom osobine produžene proporcije odrediti x, y, z i t ako je $x + y + z + t = 198$ i ako je $x : y : z : t = 1 : 2 : 3 : 5$.

Rješenje:

Teorema: Zbir svih članova sa lijeve strane znaka jednakosti produžene proporcije odnosi se prema zbiru svih članova sa desne strane proporcije kao bilo koji član sa lijeve strane prema odgovarajućem članu sa desne strane.

$$\frac{x+y+z+t}{1+2+3+5} = \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} = \frac{t}{5} = k$$

$$\frac{198}{11} = \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} = \frac{t}{5} = k, \qquad \Rightarrow \quad k = 18$$

$x = k \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x = 18}$, $\;y = 2k \;\Rightarrow\; \boldsymbol{y = 36}$, $\;z = 3k \;\Rightarrow\; \boldsymbol{z = 54}$, $\;t = 5k \;\Rightarrow\; \boldsymbol{t = 90}$

Primjer 2: Dat je kompleksni broj $z = 1 - i$.

a) napisati z u trigonometrijskom obliku
b) odrediti z^8

Rješenje:

a) Trigonometrijski oblik kompleksnog broja glasi $z = \rho(cos\varphi + i\, sin\varphi)$, pri čemu je ρ modul kompleksnog broja, a φ = arg z.

$Re(z) = x = 1,\;\; Im(z) = y = -1 \;\;\Rightarrow\;\; \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

I način: $\text{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{-1}{1} = -1,\;\; \text{tg}\, 45^0 = \text{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1 \quad \Rightarrow\;\; \alpha = \frac{\pi}{4}$

Tačka M(1, -1) koja odgovara kompleksnom broju z = 1 – i nalazi se u IV kvadrantu, a uglove iz tog kvadranta računama po formuli $\varphi = 2\pi - \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$,

II način : $sin\varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$cos\varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Sinus nekog ugla negativan je u III i IV kvadrantu, a kosinus nekog ugla pozitivan je u I i IV kvadrantu. Pošto je naš kosinus pozitivan a sinus negativan, ugao se nalazi u IV kvadrantu, tj. $\varphi = 2\pi - \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$.

Trigonometrijski oblik kompleksnog z broja glasi $\boldsymbol{z = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})}$.

b) Formula za stepenovanje kompleksnog broja u trigonometrijskom obliku glasi

$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \Rightarrow$

$z^8 = \sqrt{2^8}\left(\cos 8\cdot\frac{7\pi}{4} + i\sin 8\cdot\frac{7\pi}{4}\right) = 2^4(\cos 14\pi + i\sin 14\pi) = 16(\cos 0 + i\sin 0) = 16$

Primjer 3: Odrediti koeficijent onog člana razvoja $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{12}$ koji ne sadrži *x*.

Rješenje: Opći član u razvoju iznosi: $T_{k+1} = \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$, tj. $T_{k+1} = \binom{12}{k}x^{12-k}x^{-2k} = \binom{12}{k}x^{12-3k}$.
Tražimo ono *k* za koji je eksponent jednak nuli. Iz 12 – 3k = 0 slijedi *k* = 4. To je peti član u razvoju, a iznosi $\boldsymbol{T_5 = \binom{12}{4} = 495}$.

Primjer 4: Odrediti *d* i S_n ako je $a_1 = 2$, $a_n = 149$ i $n = 22$.

Rješenje: Opći član aritmetičkog niza glasi $a_n = a_1 + (n-1)d$. Formula za sumu glasi $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ *ili* $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$.

$a_n = a_1 + (n-1)d$
$149 = 2 + 21d$.
$\boldsymbol{d = 7}$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
$S_{22} = 11(2 + 149)$
$S_{22} = 11 \cdot 151$
$\boldsymbol{S_{22} = 1661}$

Primjer 5: Ako je u geometrijskom nizu $a_6 = -243$ i $q = -\frac{3}{2}$, izračunati a_1 i S_6.
Rješenje: Opći član geometrijskog niza je $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, pa je $a_6 = a_1 \cdot q^5$, tj. $-243 = a_1\left(-\frac{3}{2}\right)^5$, a odavde slijedi da je $\boldsymbol{a_1 = 32}$.
Pošto je $q = -\frac{3}{2} \neq 1$ za sumu koristimo formulu $S_n = a_1\frac{q^n-1}{q-1}$

$\boldsymbol{S_6 = 32 \cdot \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^6 - 1}{-\frac{3}{2} - 1} = -133}$.

II. Algebarski izrazi

Primjer 1: Odrediti realne parametre a, b, c, tako da su polinomi $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 13x - 6$ i $Q(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$ identično jednaki.

Rješenje: Potreban i dovoljan uslov da polinomi $P(x)$ i $Q(x)$ budu identički jednaki je da koeficijenti njihovih odgovarajućih članova budu jednaki:

$P(x) \equiv Q(x)$

$2x^3 - 9x^2 + 13x - 6 \equiv (x-2)(ax^2 + bx + c)$

$2x^3 - 9x^2 + 13x - 6 \equiv ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c$

$2x^3 - 9x^2 + 13x - 6 \equiv \ ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$, i odavde slijedi

$a = 2,\ b - 2a = -9,\ \ c - 2b = 13,\ \ -2c = -6$

$\boldsymbol{a = 2, b = -5,\ \ c = 3}$

Primjer 2: Pojednostaviti izraz $(x^2+2)\left(\frac{x^3}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)$, $x \neq \pm 1$.

Rješenje:

$$(x^2+2)\left(\frac{x^3}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right) = (x^2+2)\left(\frac{x^3-1}{x-1} - \frac{x^2-1}{x+1}\right) =$$

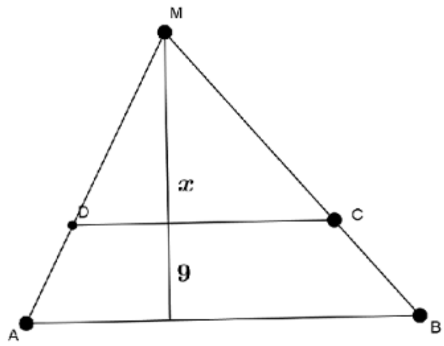
$$= (x^2+2)\left(\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} - \frac{(x-1)(x+1)}{x+1}\right) =$$

$$= (x^2+2)(x^2+x+1-x+1) = (x^2+2)(x^2+2) =$$

$$= \boldsymbol{(x^2+2)^2}$$

III. Geometrija u ravni

Primjer 1: Paralelne stranice trapeza su 18 cm i 16 cm, a visina 9 cm. Kolika je udaljenost presječne tačke produženih neparalelnih stranica od kraće osnovice?



Rješenje:

Pošto vrijedi $< MDC = < MAB$ i $< DCM = < ABM$ (uglovi sa paralelnim kracima), to su trouglovi ΔABM i ΔDCM slični (stav UU), pa su im odgovarajuće stranice i visine proporcionalne, tj. 18 : 16 = (*x* + 9) : *x*, ***x* = 72cm**.

Primjer 2: Stranice trougla su dužina *a* = 37cm, *b* = 20cm, *c* = 51cm. Izračunati poluprečnik opisane i upisane kružnice tog trougla.

Rješenje: Pošto je površina trougla data sa $P = \frac{abc}{4R} = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, gdje su *R* i *r* poluprečnici opisane i upisane kružnice, a *s* poluobim trougla, to je:

$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{37+20+51}{2} = 54,$

$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{54(54-37)(54-20)(54-51)} = \sqrt{54 \cdot 17 \cdot 34 \cdot 3} =$
$= \sqrt{9 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{(9 \cdot 2 \cdot 17)^2} = 306\text{cm}^2$

$\boldsymbol{r = \frac{P}{s} = \frac{306}{54} = \frac{17}{3}}$ **cm,** $\quad \boldsymbol{R = \frac{abc}{4P} = \frac{37 \cdot 20 \cdot 51}{4 \cdot 306} = \frac{37 \cdot 5}{6} = \frac{185}{6}}$ **cm**

Primjer 3: Stranice trougla su a = 12 cm, b = 15 cm i c = 18 cm, a obim njemu sličnog trougla je O_1 = 60 cm. Naći stranice drugog trougla i omjer površina.

Rješenje: Obimi sličnih trouglova odnose se kao odgovarajuće stranice, tj $\frac{O}{O_1} = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$

$O = a + b + c += 45$ cm

$\frac{45}{60} = \frac{12}{a_1} \Rightarrow a_1 = 16; \frac{45}{60} = \frac{15}{b_1} \Rightarrow b_1 = 20; \frac{45}{60} = \frac{18}{c_1} \Rightarrow a_1 = 24$

Stranice drugog trougla su dužine 16 cm, 20 cm i 24 cm.

Površine sličnih trouglova nalaze se u omjeru koji jednak kvadratu omjera odgovarajućih stranica (kvadrat tzv. koeficijenta sličnosti). Dakle:

$$\frac{P}{P_1} = \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = \left(\frac{12}{16}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

Omjer površina ovih trouglova iznosi $\frac{9}{16}$.

IV. Analitička geometrija u ravni

Primjer 1: Data su tjemena trougla $A(-8,1)$, $B(4,10)$, $C(16,-6)$.

a) Napisati jednačinu težišnice t_a u eksplicitnom obliku.
b) Odrediti dužinu težišne duži t_a.

Rješenje: Koordinate sredine duži BC su $A_1\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$, tj. $A_1(10,2)$.

a) Težišnica t_a određena je tačkama $A(-8,1)$ i $A_1(10,2)$, pa ćemo koristiti jednačinu prave kroz dvije tačke $y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x - x_1)$:

$$y - 1 = \frac{2-1}{10+8}(x+8)$$

$$y - 1 = \frac{1}{18}(x+8)$$

$$y = \frac{1}{18}x + \frac{4}{9} + 1$$

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{18}x + \frac{13}{9}}$$

b) Dužinu težišne duži t_a, tj. duži AA_1 određujemo preko formule za udaljenost između dvije tačke:

$d(A, A_1) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\boldsymbol{d(A, A_1) = \sqrt{(10+8)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{18^2 + 1^2} = \sqrt{325} = 5\sqrt{13}\text{cm}}$

Primjer 2: Odrediti sve vrijednosti realnog parametra m za koje prava $y = mx + 10$ predstavlja tangentu kružnice $K: \ x^2 + y^2 = 20$.

Rješenje: Da bi prava bila tangenta kružnice potreban i dovoljan uslov je da sistem jednačina

$y = mx + 10$
$\underline{x^2 + y^2 = 20}$

ima samo jedno rješenje. Uvrštavajući prvu jednačinu u drugu, dobijamo

$x^2 + (mx + 10)^2 = 20$
$(m^2 + 1)x^2 + 20mx + 80 = 0$

Početni sistem jednačina će imati samo jedno rješenje, tj. prava će biti tangenta kružnice K akko ova kvadratna jednačina ima samo jedno rješenje, dakle ako joj je diskriminanta jednaka nuli. Iz tog uslova dobije se

$D = 400m^2 - 320(m^2 + 1) = 80m^2 - 320 = 80(m^2 - 4)$
$D = 0 \Rightarrow m^2 - 4 = 0$
$m^2 = 4$
$\boldsymbol{m = \pm 2}$

V. Linearne jednačine i nejednačine. Sistemi linearnih jednačina

Primjer 1: Riješiti po x jednačinu (m realan parametar): $m^2x + 4 = m(x + 4)$

Rješenje:

$$\begin{gathered} m^2x + 4 = m(x+4) \\ m^2x + 4 = mx + 4m \\ m^2x - mx = 4m - 4 \\ (m^2 - m)x = 4(m-1) \\ m(m-1)x = 4(m-1) \end{gathered}$$

Diskusija:

1) Ako je $m(m-1) \neq 0$, tj. $m \neq 0$ i $m \neq 1$, jednačina ima jedinstveno rješenje i to

$$x = \frac{4(m-1)}{m(m-1)} = \frac{4}{m}$$

2) Ako je $m(m-1) = 0$, tj. $m = 0$ ili $m = 1$, imamo:

a) Ako je $m = 0$ data jednačina dobija oblik $0 \cdot x = -4$ što nije tačno, i jednačina nema rješenja.
b) Ako je $m = 1$ data jednačina dobija oblik $0 \cdot x = 0$, pa su rješenje jednačine svi realni brojevi.

Rezime:

1) $\boldsymbol{m \neq 0 \ \wedge \ m \neq 1 \ \Rightarrow x = \frac{4}{m}}$
2) $\boldsymbol{m = 0}$**, nema rješenja,**
3) $\boldsymbol{m = 1}$**, rješenje je** $\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}}$**.**

Primjer 2: Riješiti jednačinu: $|x-1| + |x+3| = 2x + 2$

Rješenje:

	-∞ … -3	-3 … 1	1 … ∞
$x-1$	-	-	+
$x+3$	-	+	+

i. $\boldsymbol{x \in (-\infty, -3)}$
Jednačina postaje:

$$\begin{gathered} -x + 1 - x - 3 = 2x + 2 \\ -4x = 4 \\ x = -1 \end{gathered}$$

Pošto $x = -1$ ne pripada intervalu $(-\infty, -3)$, nije rješenje!

ii. $\boldsymbol{x \in [-3,1)}$
Jednačina postaje:

$$-x + 1 + x + 3 = 2x + 2$$
$$-2x = -2$$
$$x = 1$$

$x = 1$ ne pripada intervalu $[-3,1)$, pa nije rješenje početne jednačine!

iii. $\boldsymbol{x \in [1,\infty)}$
Jednačina postaje:

$$x - 1 + x + 3 = 2x + 2$$
$$2x + 2 = 2x + 2$$
$$0 = 0$$

Dobili smo tačnu jednakost, **pa je rješenje svako *x* iz intervala** $[\mathbf{1},\infty)$**.** To je ujedno i rješenje početne jednačine.

VI. Kvadratne funkcije, jednačine i nejednačine. Jednačine višeg reda. Iracionalne jednačine

Primjer 1: Data je jednačina $(m-2)x^2 - 2(m+1)x + m + 3 = 0$. Odrediti parametar *m* tako da zbir kvadrata njenih rješenja bude 2.

Rješenje: Uslov zadatka, $x_1^2 + x_2^2 = 2$, pišemo kao $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2$ **(1)**
Po Viete-ovim pravilima imamo

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{2(m+1)}{m-2}, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m+3}{m-2} \qquad (\mathbf{2})$$

Uvrštavajući relacije **(2)** u uslov **(1)**, dobijamo:

$$\frac{4(m+1)^2}{(m-2)^2} - 2\frac{m+3}{m-2} = 2$$

tj. jednačinu po *m*:

$$14m + 8 = 0$$

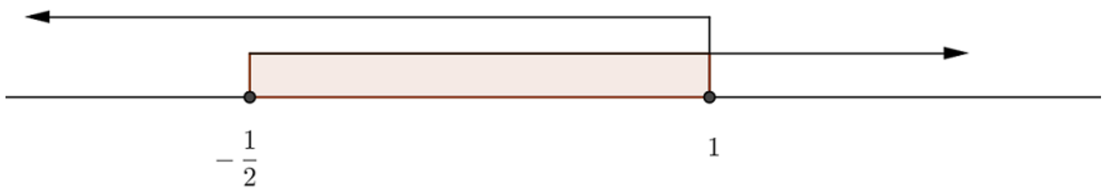
čije je rješenje $m = -\frac{4}{7}$.

Primjer 2: Riješiti jednačinu: $\sqrt{2x+1} = 1 - x$

Rješenje: Odredimo prvo definiciono područje ove jednačine:

D.P. $2x + 1 \geq 0$ i $1 - x \geq 0$

$x \geq -\frac{1}{2}$ i $x \leq 1$



Jednačina je definisana za $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.

Kvadriranjem dobijamo:

$$2x + 1 = 1 - 2x + x^2$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x-4) = 0$$

$x_1 = 0$ i $x_2 = 4$: drugo rješenje ne pripada definicionom području, **tako da je rješenje naše jednačine $\boldsymbol{x = 0}$.**

VII. Eksponencijalne funkcije, jednačine i nejednačine. Logaritamske funkcije, jednačine i nejednačine

Primjer 1: Riješiti eksponencijalnu jednačinu $3^{x+1} + 18 \cdot 3^{-x} = 29$.
Rješenje:

$$3^{x+1} + 18 \cdot 3^{-x} = 29 \ /\cdot 3^x$$
$$3^{2x+1} + 18 = 29 \cdot 3^x$$
$$3 \cdot 3^{2x} - 29 \cdot 3^x + 18 = 0$$

Uvedemo smjenu $t = 3^x$ i dobijamo kvadratnu jednačinu:

$$3t^2 - 29t + 18 = 0$$

čija su rješenja $t_1 = 9$ i $t_2 = \frac{2}{3}$.

i. $3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow \boldsymbol{x = 2}$
ii. $3^x = \frac{2}{3} \Rightarrow \boldsymbol{x = \frac{\log \frac{2}{3}}{\log 3}}$

Primjer 2: Riješiti nejednačinu: $log_{0,4}(2x-5) > log_{0,4}(x+1)$.

Rješenje: Definiciono područje nejednačine je:

$$2x - 5 > 0 \quad \text{i} \quad x + 1 > 0$$
$$x > \frac{5}{2} \quad \text{i} \quad x > -1$$

pa je definiciono područje $x \in \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

Kako je baza logaritma manja od 1, za $x \in \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ zadana nejednačina je ekvivalentna sa nejednačinom:

$$2x - 5 < x + 1$$

čije je rješenje $x < 6$.

Rješenje date nejednačine je presjek definicionog područja i rješenja ekvivalentne nejednačine, tj.

$$\boldsymbol{x \in \left(\frac{5}{2}, 6\right)}$$

VIII. Trigonometrija

Primjer 1: Ako je $\cos x = -\frac{3}{5}$, pri čemu je $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, odrediti vrijednost od $\operatorname{tg} x$.

Rješenje: Ako je $\cos x = -\frac{3}{5}$, pri čemu je $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, imamo

$$sin^2 x + cos^2 x = 1$$
$$sin^2 x = 1 - cos^2 x$$
$$sin^2 x = 1 - \frac{9}{25}$$
$$sin^2 x = \frac{16}{25}$$

$\sin x = \pm\frac{4}{5}$, a uz uslov $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ je $\sin x = \frac{4}{5}$ (funkcija sinus je pozitivna za vrijednosti argumenta x iz drugog kvadranta).

Tada je $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}$ tj.

$$\boldsymbol{\operatorname{tg} x = -\frac{4}{3}}$$

Primjer 2: Izračunati $\frac{2\sin x - \sin 2x}{2\sin x + \sin 2x}$, ako je $x = \frac{2\pi}{3}$.

Rješenje: Pošto je $\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ i $2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$, imamo:

$\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$ i $\sin\frac{4\pi}{3} = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6}$.

Sad imamo:

$$\frac{2\sin x - \sin 2x}{2\sin x + \sin 2x} = \frac{2\sin\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{4\pi}{3}}{2\sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3}} = \frac{2\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}}{2\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{6}} = \frac{3\cos\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \mathbf{3}$$

Primjer 3: Rješiti jednačinu: $\sin 2x = 2\sin x$

Rješenje:

$$\sin 2x = 2\sin x$$
$$2\sin x\cos x = 2\sin x$$
$$2\sin x(\cos x - 1) = 0$$

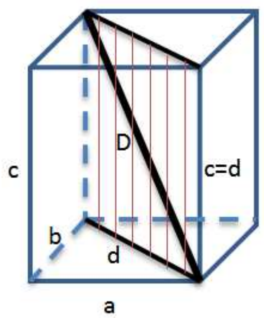
$\sin x = 0$ i $\cos x - 1 = 0$

$\boldsymbol{x_1 = k\pi,}$ $\boldsymbol{x_2 = 2k\pi,}$ $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$

IX. Geometrija u prostoru

Primjer 1: Dijagonalni presjek kvadra je kvadrat površine Q = 400 cm^2. Odrediti dužinu prostorne dijagonale.

Rješenje:



$Q = c \cdot d$, pri čemu je c jedna ivica datog kvadra a d dijagonala strane kvadra sa ivicama a i b

Pošto je dijagonalni presjek kvadrat, slijedi da je $c = d$, pa je:
$Q = c \cdot d = c^2 = 400 \Longrightarrow c = d = 20$ cm

Prostorna dijagonala ovog kvadra je dijagonala kvadrata sa dužinom stranice $c = d = 20$ cm, pa je:

$$D^2 = 2 \cdot c^2 = 2 \cdot 400 = 800$$

pa je dužina prostorne dijagonale $\boldsymbol{D = 20\sqrt{2}}$ **cm**.

Primjer 2: Odrediti zapreminu kupe čija je površina $P = 384\pi$ dm^2, a izvodnica s je za 4 dm kraća od prečnika kupe.

Rješenje: Površinu kupe računamo po formuli $P = r^2\pi + r\pi s$. Dato je $P = 384\pi$ dm^2 i $s = (2r - 4)$ dm. Imamo:

$$P = r^2\pi + r\pi s \implies 384\pi = r^2\pi + r\pi(2r - 4) \implies 384 = r^2 + r(2r - 4)$$

Dobijamo kvadratnu jednačinu po r, $3r^2 - 4r - 384 = 0$, čija su rješenja $r_1 = 12, r_2 = -\frac{32}{3}$. Pošto radijus (poluprečnik) kruga ne može imati negativnu dužinu, rješenje je samo $r = 12$ dm.

Sad imamo $s = 2r - 4 = 20$ cm. Visinu kupe računamo pomoću Pitagorinog teorema:

$$H^2 = s^2 - r^2 \implies H^2 = 400 - 144 \implies H^2 = 256$$

Visina kupe iznosi $H = 16$ dm. Zapreminu kupe računamo po formuli $V = \frac{1}{3}r^2\pi H$ i imamo:

$$\boldsymbol{V} = \frac{1}{3} r^2 \pi H = \frac{1}{3} \cdot 12^{\,2} \cdot \pi \cdot 16 = \mathbf{768}\boldsymbol{\pi}\ \mathrm{dm}^3$$

Primjer 3: Izračunati ugao između vektora $\vec{a} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} - 4\vec{k}$ i $\vec{b} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$.

Rješenje:

$$cos\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$cos\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1-2-8}{\sqrt{1+1+16}\sqrt{1+4+4}} = \frac{-9}{\sqrt{18}\sqrt{9}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, pa je ugao između ova dva vektora $\mathbf{135^0}$.

Primjer 4: Naći površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima: $\vec{a} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ i $\vec{b} = 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}$.

Rješenje: Površinu paralelograma konstruisanog na zadanim vektorima računamo po formuli

$P = |\vec{a} \times \vec{b}|$. Odredimo prvo vektorski proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6\vec{\imath} + 6\vec{k} - 4\vec{\jmath} = 6\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 6\vec{k}$$

Sad možemo odrediti površinu paralelograma:

$$P = |6\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 6\vec{k}| = \sqrt{36 + 16 + 36} = \sqrt{\mathbf{88}}$$

X. Realne funkcije jedne promjenjive. Diferencijalni račun. Integralni račun

Primjer 1: Odrediti područje definisanosti (domen) funkcije $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$

Rješenje: Funkcija $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$ je definisana za $x^2 - 6x + 5 \geq 0$.

$$x_{,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = 5, \qquad x_2 = 1$$

$$(x - 5)(x - 1) \geq 0 \ \Rightarrow \ x \in (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$$

Pa je $(-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$ definiciono područje date funkcije.

Primjer 2: Ako je $f(x) = 2x + 1$, odrediti:

a. $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x-3)}$

b. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x+1)}{f(x-3)}\right)^{f\left(\frac{x}{2}\right)+1}$

Rješenje: Pošto je $f(x+1)=2(x+1)+1=2x+3$, $f(x-3)=2(x-3)+1=2x-5$, te $f\left(\frac{x}{2}\right)=2\cdot\frac{x}{2}+1=x+1$, imamo:

a. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x-3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{2x-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\overbrace{\frac{3}{x}}^{0}}{2-\underbrace{\frac{5}{x}}_{0}}=\frac{2}{2}=\mathbf{1}$$

b. $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x+1)}{f(x-3)}\right)^{f\left(\frac{x}{2}\right)+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-5}\right)^{x+2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{8}{2x-5}\right)^{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{2x-5}{8}}\right)^{\frac{2x-5}{8}}}_{e}\right]^{\overbrace{\frac{8}{2x-5}(x+2)}^{4}}=\boldsymbol{e^4}$$

Primjer ispita za eksternu maturu na nivou A

Napomena: Rješenja zadataka su $\boxed{\text{uokvirena}}$.

---

1. Ako je $a_1 = -40, S_{20} = -40$, izračunati a_{20} i d.

Rješenje je:

a) $a_{20} = 36, d = -4$

b) $a_{20} = -36, d = 4$

c) $\boxed{\boldsymbol{a_{20} = 36, d = 4}}$

d) $a_{20} = -36, d = -4$

2. Pojednostaviti izraz $\left(\frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b}\right) : \frac{1}{b^2-a^2}$, $a \neq \pm b$

Rješenje je:

a) $\boxed{\boldsymbol{4ab}}$

b) $-4ab$

c) $2b^2$

d) $-2b^2$

3. Normala spuštena iz vrha B paralelograma ABCD na dijagonalu AC dijeli tu dijagonalu na dva dijela dužina 15 cm i 6 cm. Odrediti dužine stranica paralelograma, a i b, ako je $a - b = 7$ cm.

Rješenje je:

a) $a = 27$ cm, $b = 20$ cm

b) $a = 24$ cm, $b = 17$ cm

c) $\boxed{\boldsymbol{a = 17 \text{ cm}, b = 10 \text{ cm}}}$

d) $a = 14$ cm, $b = 7$ cm

4. Odrediti sve vrijednosti parametra m za koje prava $(m+1)x - (3-m)y + 7 - m = 0$ zatvara ugao od 45° sa pravom $x + 2y = 5$.

$\boxed{\textbf{Rješenje: } \boldsymbol{m_1 = 0 \text{ i } m_2 = 5}}$

5. Riješiti jednačinu $|x-1| + |x+3| = 2x + 2$

$\boxed{\textbf{Rješenje: } \boldsymbol{x \in [1, +\infty)}}$

6. Ako su x_1 i x_2 rješenja jednačine $2x^2 + 3x + 3 = 0$, izračunati brojnu vrijednost izraza $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

$\boxed{\textbf{Rješenje: } -1}$

7. Riješiti jednačinu $\frac{3}{\log x - 1} = \log x + 1$

$\boxed{\textbf{Rješenje: } \boldsymbol{x_1 = 100, x_2 = 0,01}}$

8. Riješiti jednačinu $\sin 2x = 2\sin^2 x$

$\boxed{\textbf{Rješenje: } \boldsymbol{x = k\pi; x = k\pi + \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}}}$

9. Uspravna kupa ima poluprečnik baze $r = 6$ cm i omotač površine $M = 60\pi\ \text{cm}^2$. Izračunati zapreminu kupe.

$\boxed{\textbf{Rješenje: } \boldsymbol{V = 96\pi}\ \text{cm}^3}$

10. Odrediti definiciono područje funkcije $y = \sqrt{\log_{0,5} \frac{x^2-2}{2}}$

$\boxed{\textbf{Rješenje: } \boldsymbol{x \in [-2, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2]}}$

Struktura ispita

Svi zadaci u Vodiču su koncipirani na osnovu nastavnih jedinica iz važećeg Nastavnog plana i programa gimnazije i srednjih tehničkih škola. Selekcija zadataka je izvršena na osnovu odobrenih udžbenika Matematike za gimnaziju i srednje tehničke škole.

Ispit će se sastojati od 10 zadataka ujednačene težine i slične strukture kao u Vodiču. Maksimalan broj bodova koje učenik može osvojiti na ispitu iznosi 10 bodova.

Jedan zadatak se boduje sa 1 bod ili 2 x 0,50 bodova. Ako zadatak sadrži jedan dio, onda se tačan odgovor boduje 1 bodom, a ako je zadatak sastavljen iz dva dijela onda se svaki tačno urađen dio boduje sa 0,50 bodova.

Literatura

1. *Nastavni planovi i programi iz matematike četverogodišnjih srednjih škola Kantona Sarajevo*
2. Alić, M. & Smajlović, L. *Matematika za prvi razred Gimnazije*. IP „Svjetlost“ d.d. Sarajevo
3. Džubur, N. *Matematika sa zbirkom zadataka*. IP „Svjetlost“ d.d. Sarajevo
4. Hodžić, A. *Matematika za učiteljsku školu*. „OKO“ Sarajevo
5. Huskić, A. *Matematika za tehničke škole I*. IP „Svjetlost“ d.d. Sarajevo
6. Huskić, A. *Matematika sa zbirkom zadataka II*. IP „Svjetlost“ d.d. Sarajevo
7. Huskić, A. *Matematika – zbirka riješenih zadataka III*. IP „Svjetlost“ d.d. Sarajevo
8. Huskić, A. *Matematika – zbirka riješenih zadataka IV*. IP „Svjetlost“ d.d. Sarajevo
9. Prgo, Š. *Matematika za drugi razred srednjih škola*. IP „Svjetlost“ d.d. Sarajevo
10. Softić, S. *Matematika za treći razred srednjih škola*. IP „Svjetlost“ d.d. Sarajevo